



Ministério da Ciência e Tecnologia

Observatório Nacional

**Estudo da distribuição do momento angular após a
fragmentação de um asteróide reacumulado**

Paulo Fernando Penteado

Orientadora

Dra. Daniela Lazzaro

Dissertação de Mestrado

Julho de 2003

Agradecimentos

A Daniela Lazzaro, pela orientação.

A Takeshi Kodama, Fernando Roig e René Duffard pela colaboração.

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Corpos reacumulados e sua importância | 2 |
| 1.2 | Evolução rotacional dos asteróides | 13 |
| 1.3 | Evolução colisional de asteróides | 21 |
| 1.4 | Experimentos de laboratório | 27 |
| 1.5 | O modelo semi-empírico de Paolicchi | 38 |
| 1.6 | Estudos numéricos de fragmentação | 40 |
| 1.7 | A energia para fragmentar um asteróide | 47 |
| 2 | Elipsóides Interagentes | 55 |
| 2.1 | Desenvolvimento das equações de movimento | 60 |
| 2.2 | Desenvolvimento do lagrangeano do sistema | 62 |
| 2.3 | Eliminação de variáveis no lagrangeano | 65 |
| 2.4 | Método dos multiplicadores de Lagrange | 66 |
| 2.5 | Implementação computacional | 67 |
| 2.6 | Outros softwares desenvolvidos | 69 |
| 2.7 | Identificação de corpos reacumulados | 72 |
| 2.8 | Inclusão de dissipação | 76 |
| 2.9 | Simulações de colisões com alvos reacumulados | 80 |
| 3 | O modelo de evolução rotacional de Harris | 85 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4 | Simulações de evolução rotacional | 95 |
| 4.1 | Alvos compostos | 95 |
| 4.2 | Resultados | 99 |
| 4.3 | Alvos simples | 108 |
| 4.4 | Resultados | 109 |
| 4.5 | Conclusões | 113 |
| 5 | Conclusões e Perspectivas Futuras | 117 |
| | Referências | 121 |
| | Artigo | 131 |

Resumo

Asteróides reacumulados são corpos formados pela agregação de fragmentos sem coesão, mantidos unidos primariamente pela sua gravidade. Na última década, estimativas de tempos de vida colisional, estudos numéricos de fragmentação e diversas observações, das propriedades rotacionais, de densidades muito baixas, de formas muito irregulares, de crateras gigantes e de famílias têm sugerido que corpos reacumulados sejam mais comuns no Cinturão de Asteróides do que se imaginava anteriormente. Tem se constatado também que os processos colisionais e a rotação dos asteróides têm um papel central na determinação das características observadas na população e em sua evolução, embora ainda não haja explicações quantitativas para muitas propriedades importantes observadas nos asteróides.

Este trabalho dá continuidade ao desenvolvimento de um modelo para fragmentação colisional de corpos reacumulados iniciado em um projeto de final de curso de graduação. O modelo de Elipsóides Interagentes é baseado em corpos reacumulados nos quais os seus fragmentos são elipsóides que interagem entre si por meio de sua gravidade, força de contato e dissipando energia. Estamos realizando o desenvolvimento gradual do modelo, de forma a identificar a atuação de cada processo modelado para o resultado final de uma colisão.

Apresentamos o seu desenvolvimento, com os melhoramentos incluídos no modelo original, e discutimos as primeiras aplicações realizadas com o modelo, de forma a simular a evolução rotacional de uma população de corpos reacumulados submetidos a colisões.

Palavras-chave: asteróides reacumulados, rotação, colisões, fragmentação, formação de famílias.

Abstract

Rubble-piles are bodies formed by the loose aggregation of fragments, held together solely by their gravity. In the past decade, collisional life time estimates, numerical studies of fragmentation and several observations, as underdense asteroids, irregular shapes, giant craters and the asteroid families have suggested that rubble-piles are more common than previously held. It has also been realized that collisional processes and rotation have a central role in determining the observed characteristics of the asteroid population and its evolution, although there are not yet quantitative models for many important properties of the asteroids.

This work continues the development of a model for collisional fragmentation of rubble-piles, which started in an undergraduate dissertation. The Interacting Ellipsoids model is based in rubble-piles in which the fragments are ellipsoids that interact mutually, by means of their gravity, contact forces and dissipating energy. We are working on a gradual development of this model, in order to identify the role of each modelled process to the final result of a collision.

We present here its development, with the improvements added to the original model, and discuss the first applications of the model, in order to simulate the rotational evolution of a population of rubble-piles subjected to collisions.

Capítulo 1

Introdução

O estudo das propriedades físicas e dinâmicas dos asteróides e dos processos que determinam sua evolução se intensificaram de forma bastante significativa na última década. Neste período ocorreu um grande aumento na quantidade e qualidade dos dados observacionais disponíveis. Foram realizadas observações de asteróides por sondas, como 951 Gaspra e 243 Ida (e seu até então desconhecido satélite Dactyl) pela Galileu, em 1993, e em 1997-2000 a sonda NEAR Shoemaker observou de perto 253 Matilde e 433 Eros, pousando neste último; também ocorreu na última década a observação dos primeiros asteróides com satélites, havendo hoje mais de uma dezena destes conhecidos (Merline et al., 2002). As bases de dados de órbitas, características superficiais e períodos rotacionais foram consideravelmente ampliadas, permitindo verificar hipóteses e previsões teóricas anteriores. Os experimentos de laboratório e modelos numéricos para fragmentação puderam se tornar consideravelmente mais refinados. Como esperado, muitos pontos de vista tradicionais têm sido revistos e muitas novas questões surgiram.

Em particular, maior atenção tem sido dedicada aos corpos reacumulados, que consistem de uma agregação de fragmentos fracamente ligados entre si. Novos dados de asteróides têm indicado que estes corpos são comuns, podendo mesmo ser a maioria dos asteróides até diâmetros tão pequenos como 1Km. Modelagens numéricas recentes têm indicado que estes corpos são mais resistentes à fragmentação colisional que corpos monolíticos, pela sua alta dissipação interna de energia e pelo fato da onda de choque do

impacto não ser eficientemente transmitida entre fragmentos preexistentes. O resultado seria que muitos impactos apenas comprimem o material poroso em torno da região de impacto, ou a fragmentação se restringe à região próxima ao impacto. Estas conclusões, se corretas, podem explicar um problema antigo para a hipótese de formação das famílias de asteróides através de fragmentação colisional: as velocidades de ejeção necessárias para que os fragmentos tenham a distribuição orbital observada hoje são bastante altas, e para que estas velocidades sejam geradas pela fragmentação de um corpo monolítico os fragmentos gerados seriam muito pequenos, menores que os membros observados das famílias. Outro problema, mais recente, que poderia ser explicado desta forma, é a observação de alguns asteróides, como Eros, Mathilde, Kleopatra, Gaspra, Ida e os satélites de Marte Phobos e Deimos, que possuem formas muito irregulares ou grandes crateras, com diâmetros comparáveis às dimensões do corpo. Segundo os modelos previamente estabelecidos para corpos monolíticos, seria muito difícil ou impossível que estes corpos tivessem sofrido colisões fortes o suficiente para explicar suas formas, sem que eles tivessem sido completamente destruídos.

A partir desta nova perspectiva sobre a presença de corpos reacumulados e a importância das colisões para a evolução do Cinturão de Asteróides, este trabalho trata de compreender melhor os processos físicos dominantes para a evolução colisional dos asteróides. O que é feito a partir do desenvolvimento gradual de um modelo de fragmentação colisional de corpos reacumulados, no qual a evolução rotacional dos fragmentos e dos corpos formados é considerada um dos mais importantes processos atuantes e um dos principais vínculos observacionais disponíveis a serem atendidos.

1.1 Corpos reacumulados e sua importância

Embora tradicionalmente seja aceito o conceito de que corpos reacumulados (*rubble-piles*) existam no Cinturão, como citado por Chapman em 1978, ainda não há uma observação direta que mostre que algum asteróide seja reacumulado, e apenas recentemente têm sido obtidas evidências que este tipo de estrutura é comum, podendo representar uma parcela

considerável dos asteróides do Cinturão, mesmo entre os tão pequenos como os de 1Km de diâmetro.

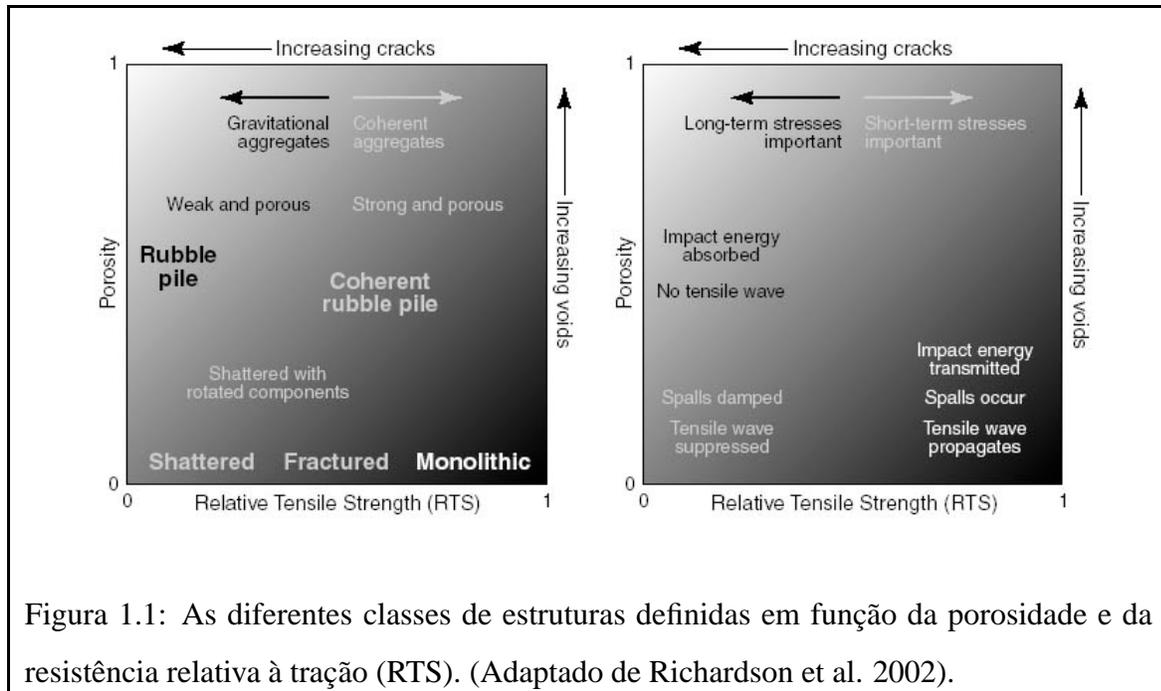
Tendo em vista a crescente importância que tem sido dada aos corpos com este tipo de estrutura, Richardson e colaboradores (2002) introduziram a primeira tentativa de classificar diferentes tipos de estruturas de corpos reacumulados, de forma a evitar as ambigüidades. A classificação de Richardson baseia-se em duas variáveis para caracterizar a porosidade e a resistência à tração. A porosidade é definida como a razão entre o volume de espaço vazio de um corpo e o seu volume total aparente, variando portanto entre 0 e 1; a outra variável, RTS (*Relative Tensile Strength*) é definida como a razão entre a resistência à tração do objeto e a resistência à tração média de seus componentes, também variando, portanto, entre 0 e 1 - resistência à tração sendo definida como a maior força por unidade de área capaz de ser suportada sem que haja separação em dois fragmentos no plano perpendicular ao plano de aplicação da força. A definição de porosidade inclui tanto microporosidade (presente entre os grãos de um fragmento) como macroporosidade (presente entre fragmentos). A partir destas duas variáveis, foi feita a classificação mostrada na figura 1.1. Outra variável auxiliar usada para definir a nomenclatura é a fração de massa MF, correspondendo à razão entre a massa do maior fragmento e a massa total do corpo.

Com base nestas variáveis, foram definidas as seguintes classes de objetos:

Monolíticos: são os corpos com baixa porosidade e alta RTS, correspondendo a corpos essencialmente não fraturados, formados por um único fragmento. Segundo estudos numéricos recentes estes corpos são resistentes a tensões aplicadas de forma lenta, como colisões a baixas velocidades e forças de maré, mas impactos de alta velocidade provocam uma fragmentação significativa por todo o corpo, pela alta eficiência de propagação da onda de choque no seu interior.

Fraturados: são corpos ainda compostos por uma única componente e de baixa porosidade, mas que têm uma resistência RTS menor por apresentarem fissuras internas.

Fragmentados (*shattered*): são corpos que apresentam mais fraturas, de forma a separá-los em componentes distintas. Estes têm uma resistência RTS ainda menor que os



fraturados, de forma que podem ser mais facilmente fragmentados por esforços lentos. Pela sua divisão em fragmentos distintos, no entanto, as ondas de choque têm dificuldade de se propagar de um fragmento para outro, de forma que sob um impacto de alta velocidade os danos são mais restritos ao fragmento que recebeu o impacto, tornando-os portanto mais resistentes a impactos.

Fragmentados com componentes deslocadas (*shattered with rotated components*): estes corpos estão divididos em vários fragmentos, e estes fragmentos estão em posições diferentes das que ocupavam quando se formaram, mas não de forma significativamente diferente da sua distribuição original, de forma que suas macroporosidades não são significativamente altas. Seriam, por exemplo, os resultantes de uma colisão que dispersou levemente os fragmentos. Estes possuem uma resistência RTS moderada, e uma porosidade maior que a classe anterior.

Corpos reacumulados (*rubble-piles*): esta é a classe mais variada em sua composição, compreendendo corpos formados por um conjunto de fragmentos soltos e agregados de forma desordenada. Estes têm uma baixa resistência RTS - proveniente principalmente de sua gravidade uma vez que não há forças de coesão significativas - de forma que podem

ser facilmente dispersos por esforços lentos. Segundo alguns estudos recentes (os quais são discutidos adiante) estes corpos teriam uma alta resistência a impactos. Praticamente apenas os fragmentos atingidos pelo impacto são danificados (podendo mesmo ser pulverizados), enquanto os outros são pouco afetados. Estes corpos têm altas porosidades, devidas à sua constituição de fragmentos soltos que não se encaixam, o que pode tanto ser o resultado de sua formação como ter sido provocado pela reacumulação posterior a um impacto.

Corpos reacumulados coerentes: estes corpos são os reacumulados que possuem uma RTS maior, devido à presença de alguma ligação fraca entre os fragmentos;

Corpos porosos: estes podem ter resistência RTS variável, e se caracterizam apenas pela alta porosidade. Os fracos são o que se normalmente se associa a cometas, e os fortes seriam materiais que apresentam coesão mesmo com alta porosidade.

Adicionalmente, a variável MF é usada como uma outra informação independente para indicar o tipo de estrutura. Corpos com $MF > 0.5$ correspondem aos chamados corpos compostos, os quais são dominados por um grande fragmento, envolto por regolitos ou fragmentos pequenos. Para designar conjuntos de fragmentos agregados de tamanho pequeno, mas não o suficiente para serem considerados poeira, tem sido comum o uso do termo *megaregolitos*, enquanto o termo *regolitos* fica reservado à poeira. Valores de $MF < 0.5$ implicam em corpos formados pela aglomeração de fragmentos de tamanhos semelhantes, possivelmente com a presença de regolitos ou megaregolitos, como corpos binários ou os corpos agregados, que são aqueles nos quais há um grande número de fragmentos grandes de tamanhos semelhantes.

A nomenclatura usada neste trabalho mantém-se de acordo com o definido aqui, embora com o uso também da expressão corpos compostos como equivalente a corpos reacumulados, sem distinção de sua distribuição de massa.

Como observado por alguns autores (Richardson et al., 2002), há hoje várias indicações diferentes para presença de um grande número de corpos reacumulados no Cinturão. A seguir são descritas algumas destas.

Velocidades de rotação: Apenas recentemente foram obtidos os primeiros períodos

de rotação de corpos muito pequenos, os menores que 10Km, (Harris 2002, Pravec e Harris 2000, Pravec et al. 2002). Como pode ser visto na distribuição ilustrada na figura 1.2, há uma nítida distinção entre os asteróides maiores que 150m e os menores: estes últimos têm rotação muito rápida, com velocidades maiores que 12 rotações/dia. É ainda notável o fato de que nos corpos maiores que este diâmetro há um nítido corte na distribuição de períodos em torno deste mesmo valor, estando todos com velocidades menores. Para os corpos pequenos (entre 150m e 10Km) a distribuição parece ser bimodal, enquanto para os maiores que 10Km a distribuição se dá em torno da média, de forma próxima de uma maxwelliana. Esta média de velocidade de rotação diminui até em torno de 13 horas de período em 100Km, enquanto para tamanhos maiores (200Km) a média corresponde a um período em torno de 8h, e para 40Km a média está em torno de 6h.

A ausência de corpos grandes com período menor que 2h é notável por este valor corresponder ao limite para a rotação de um corpo sem coesão, suportado apenas pela sua gravidade (para corpos esféricos e homogêneos, este limite é função apenas da densidade; este valor de 2h corresponde ao limite para corpos com densidade em torno de $2.9g/cm^3$, típico dos materiais que formam a maioria dos asteróides). Desta forma, a ausência de corpos maiores que 150m com rotação mais rápida que o limite de corpos reacumulados é altamente sugestiva que os corpos reacumulados sejam muito freqüentes, se não dominantes acima de 150m, e que abaixo deste valor a dominância seja de fragmentos monolíticos ejetados de corpos maiores. No entanto, como notado em Asphaug et al. (2002), esta ausência de corpos com rotação mais rápida que o limite para corpos sem coesão pode ser indicativa da presença de uma espessa camada de regolitos: se o corpo é acelerado regolitos são ejetados, carregando momento angular e mantendo a sua rotação mais lenta que o limite. Esta explicação exigiria, no entanto, a presença comum de camadas muito espessas de regolitos, de forma que sua massa seja suficiente para alterar o movimento dos fragmentos grandes. É notado por estes autores também que a coesão necessária para manter inteiro, por exemplo, o asteróide 1998KY26, que tem 30m de diâmetro e 11 minutos de período de rotação é de apenas $300dyn/cm^2$, um valor ordens de magnitude menor que a coesão encontrada na neve. Assim, embora tenha alguma coesão é prematuro dizer

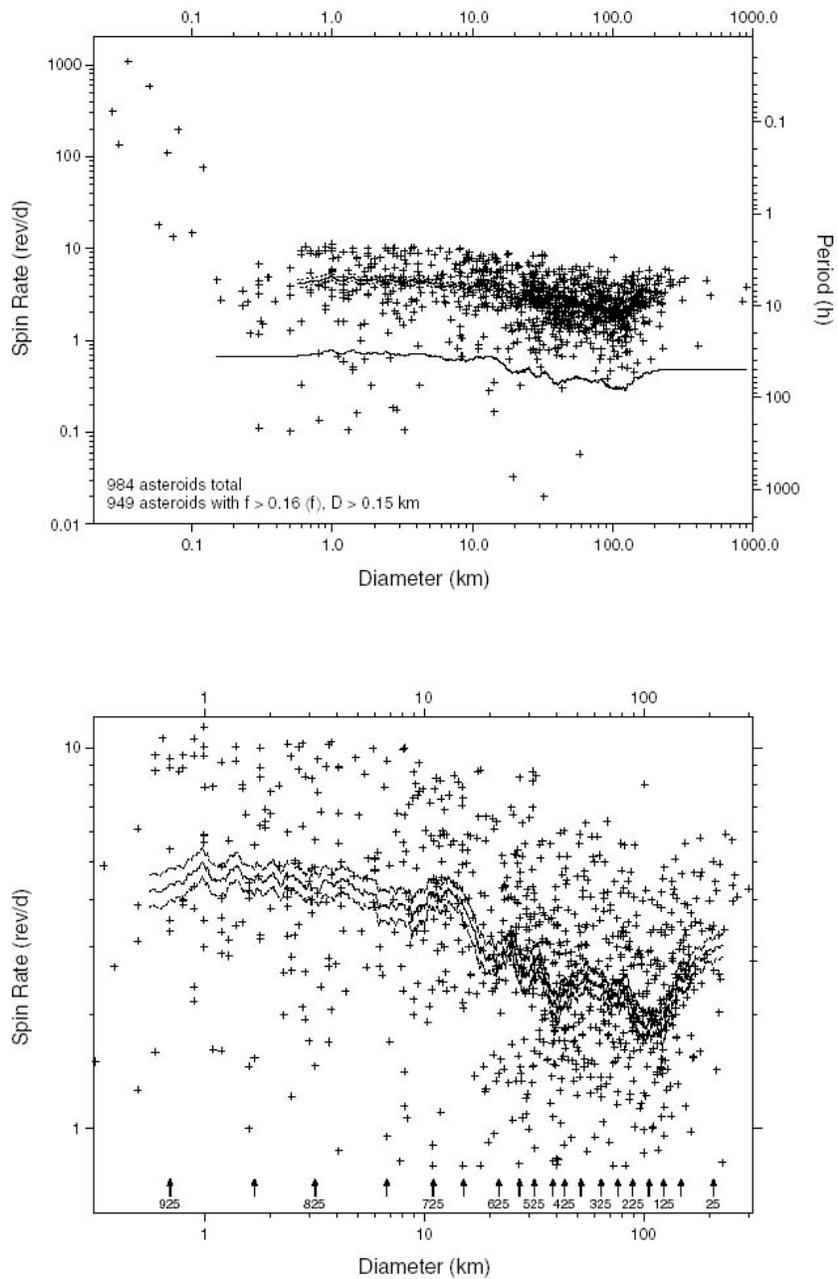
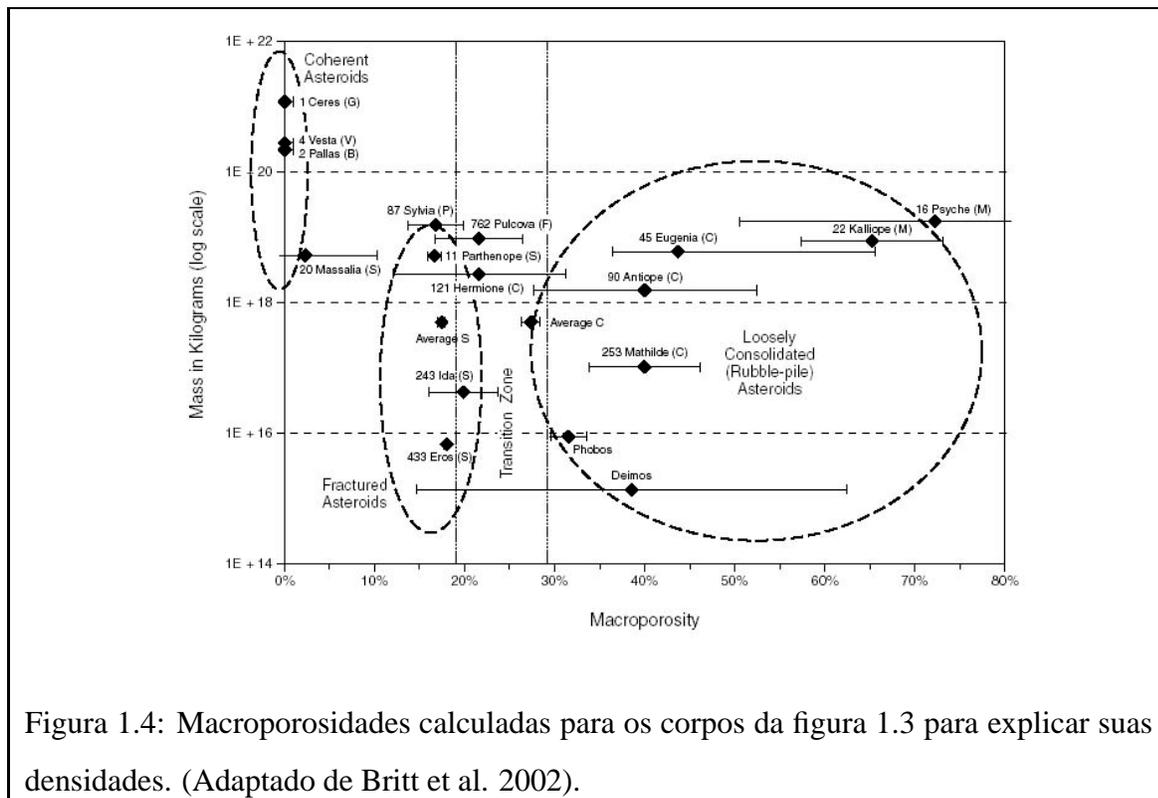
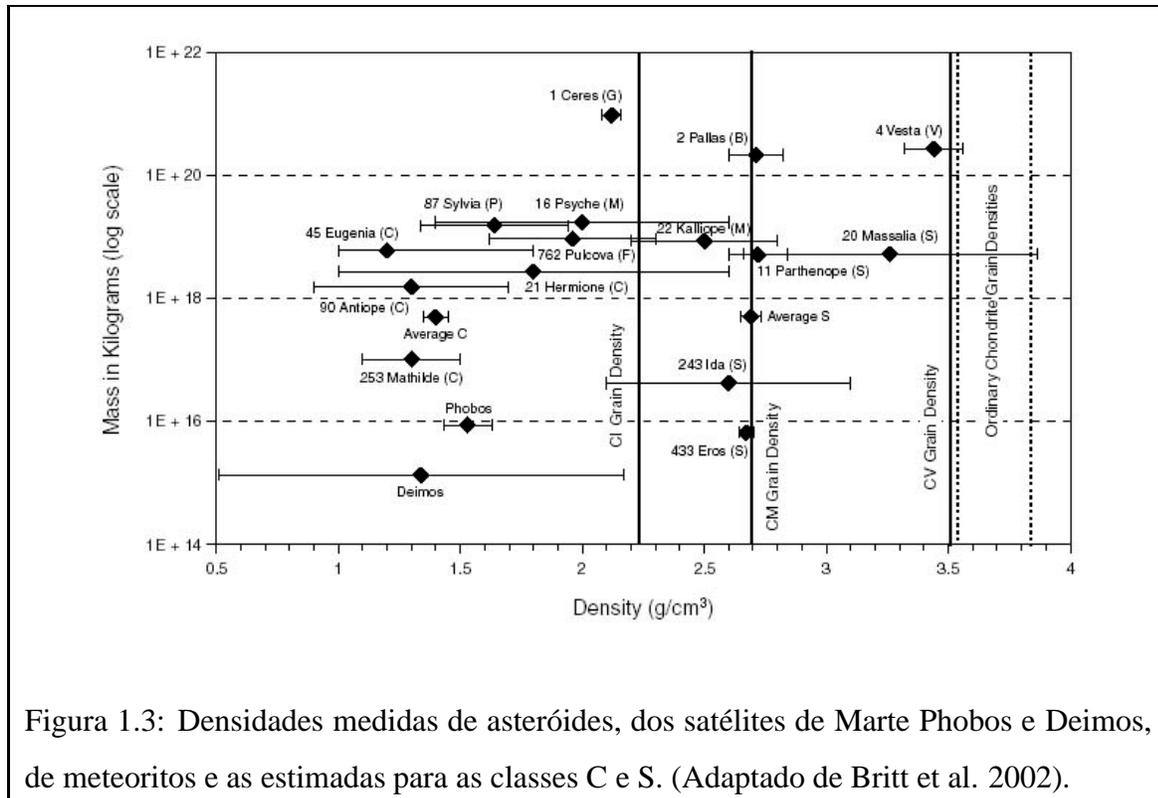


Figura 1.2: As distribuições de velocidades de rotação por tamanho. O segundo gráfico é uma ampliação da parte mais densa do primeiro. (Adaptado de Pravec et al. 2002).

que este corpo é monolítico. É conveniente lembrar que todos os corpos menores que 150m com período de rotação medido são NEA (*Near Earth Asteroids*) devido à seleção observacional, outro indicativo que estes corpos sejam fragmentos ejetados em colisões.

Densidades de asteróides: Recentemente foram obtidas medidas das massas de alguns asteróides, por meio de medidas das perturbações gravitacionais provocadas em sondas, em outros asteróides e em Marte, além de observações de sistemas binários. Estas, juntamente com medidas de seu tamanho obtidas primariamente por observações diretas realizadas por sondas, radar e por fotometria combinada no visível e infravermelho (na sua maioria obtidas do satélite IRAS), levaram à constatação de que uma fração significativa dos asteróides tem uma alta porosidade. Esta conclusão se deve a sua densidade ser consideravelmente menor que as dos materiais considerados seus análogos composicionais, como mostrado na figura 1.3 que mostra as densidades obtidas, e na figura 1.4 que mostra as macroporosidades necessárias para explicar estas densidades (caso estejam corretas as estimativas de suas composições). Vê-se que apenas os três maiores asteróides têm certamente uma estrutura monolítica; todos os outros têm porosidades mais altas, implicando em estruturas fraturadas ou de corpos reacumulados. Embora haja grandes incertezas para alguns corpos, ainda assim é bastante claro que alguns devem ter estrutura reacumulada. Em particular, o caso mais extremo é o de 16 Psyche, que é o maior asteróide tipo M, com 264Km de diâmetro, e que tem uma densidade de apenas $2g/cm^3$. A sua composição metálica corresponderia a uma densidade em torno de $7.4g/cm^3$, o que implicaria uma porosidade em torno de 75%: haveria mais espaço vazio que preenchido dentro de Psyche. Tanto espectros quanto o seu albedo no visível e radar indicam uma superfície metálica, de forma que parece ser difícil que esta composição esteja incorreta. O segundo corpo com maior porosidade, 22 Kalliope (densidade $2.5g/cm^3$) é também de tipo M. (Britt et al. 2002)

Asteróides com grandes crateras: Muitos dos corpos pequenos observados por sondas apresentam crateras com diâmetros comparáveis às suas dimensões, como nos casos de Mathilde, Ida, Phobos e Deimos, como ilustrado na figura 1.5. Segundo as leis de escalonamento para o tamanho de crateras obtidas para corpos monolíticos, colisões com



energia suficiente para gerar crateras deste tamanho teriam energia suficiente para destruir completamente o alvo (Asphaug et al. 2002). Apenas se os corpos fossem muito mais resistentes à fragmentação eles poderiam ter crateras tão grandes, o que poderia advir de uma estrutura reacumulada, na qual a alta porosidade e a separação em fragmentos distintos permitiriam que mais energia fosse dissipada e que a energia do impacto ficasse restrita à região atingida, evitando a destruição do alvo. A ausência de marcas formadas pelo material ejetado e a conservação das crateras antigas em Mathilde sugerem que o mecanismo de formação de suas crateras seja a compactação, e não a ejeção do material, o que também implicaria em alta porosidade.

Asteróides irregulares e com fendas: Alguns asteróides foram observados com formas altamente irregulares ou com estrutura de dois lobos, como é o caso de 4769 Castalia, 4179 Toutatis, 216 Kleopatra, 1620 Geographos 243 Ida e 433 Eros, como ilustrado na figura 1.6. Em todos os asteróides observados com resolução suficiente foram encontradas fissuras em sua superfície e todas estas características são corentes com uma formação por aglomeração desordenada de fragmentos.

Efeitos de maré: crateras duplas e seqüências de crateras observadas em Mercúrio, Vênus, Terra, Marte e em vários satélites dos Sistema Solar são consistentes com uma formação devida ao impacto de um corpo previamente fragmentado pela força de maré do corpo com o qual colidiram. Há um caso no qual a disrupção do corpo pela força de maré foi observada, na fragmentação do cometa Shoemaker-Levy-9 antes de seu impacto em Júpiter, em 1994. Para que um corpo possa se fragmentar apenas por forças de maré, ele deve ter baixa resistêcia à tração, o que é uma característica de corpos reacumulados. Este tipo de evento foi modelado numericamente por Richardson e colaboradores (Richardson et al. 1998, Bottke Jr. et al. 1999, Leinhardt et al. 2000), que encontraram resultados bastante coerentes com as observações de seqüências de crateras. Foi observado também que esta interação pode levar a formas muito semelhantes às observadas em alguns corpos, como Eros e Ida, bem como gerar satélites.

Famílias de asteróides: Desde sua primeira identificação por Hirayama (1918), o mecanismo proposto para a formação de famílias é a fragmentação colisional. No entanto,



Figura 1.5: Fotomosaico de Phobos montado a partir de imagens feitas pela sonda Viking, mostrando a sua grande cratera Stickney, com cerca de 10Km de diâmetro, em um corpo de 19x21x27Km. São visíveis também fendas e um grande número de crateras pequenas. (Adaptado de Asphaug et al. 2002).

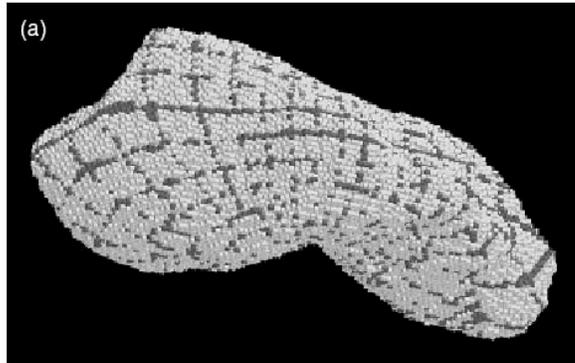


Figura 1.6: Modelo para a forma de Ida, derivado de imagens da Galileu, e usado para as simulações SPH de fragmentação. (Adaptado de Asphaug et al. 2002).

as velocidades de ejeção calculadas para os membros das famílias, em torno de 100m/s (Zapallà et al. 1984, Cellino et al. 1999), são muito altas para a fragmentação de um corpo monolítico: uma colisão com energia para gerar estas velocidades levaria a fragmentos muito pequenos. Para compatibilizar as velocidades com os tamanhos dos membros das famílias, seria necessário que o alvo tivesse uma resistência maior à fragmentação, o que poderia ocorrer por meio de alta porosidade e ser dividido em vários fragmentos, de forma a absorver mais energia e a dificultar a propagação da onda de choque.

Probabilidades de colisão: Segundo vários estudos da sua distribuição orbital (Farinella et al. 1982), a maior parte dos asteróides tem uma probabilidade grande de ter sofrido uma colisão capaz de levar a uma fragmentação significativa. Considerando-se a diferença entre a energia necessária para fragmentar e para dispersar um corpo - em torno de um fator 100 para corpos de 10Km, segundo Holsapple e colaboradores (2002) - espera-se que sejam comuns colisões capazes de fragmentar os corpos mas não dispersá-los. Para um corpo de 100Km, uma colisão capaz de fragmentá-lo é esperada a cada 1 bilhão de anos, e um período 100 vezes maior para uma colisão capaz de dispersá-lo, de forma que nesta faixa de tamanho é esperado que os corpos sejam reacumulados. Um corpo de 10Km sofreria cerca de 50 colisões capazes de fragmentá-lo até que sofresse dispersão.

1.2 Evolução rotacional dos asteróides

O estudo da evolução da rotação dos asteróides tem uma grande complexidade inerente por envolver a interação entre dois processos que independentemente já são bastante complexos e ainda pouco compreendidos: as colisões e a rotação dos asteróides.

As primeiras considerações sobre a rotação de um asteróide podem ser obtidas tomando-o como um corpo rígido. O fato de corpos reacumulados serem comuns é a limitação mais séria a esta suposição, mas esta serve como uma primeira aproximação, para avaliar quando os efeitos de movimentos e dissipação interna de energia são importantes.

Desde antes de se conhecer as formas dos asteróides era esperado que fossem irregulares, uma vez que não têm tamanho suficiente para serem forçados por sua gravidade a formas esféricas. Observacionalmente, a maior parte das informações de forma vem da análise da variação temporal de seu brilho (curvas de luz), uma vez que apenas alguns poucos corpos puderam ser observados com resolução suficiente para resolver sua forma. A partir de procedimentos de inversão de curvas de luz pode-se obter informações sobre a forma dos asteróides. Os métodos mais simples, e que demandam menos observações e menor precisão, em geral levam a um modelo de um elipsóide triaxial, de onde a forma é caracterizada pelos seus eixos principais - estes dados em geral são apresentados sob a forma das razões entre os eixos.

O nível de detalhamento da forma que se pode obter é definido basicamente pela quantidade de dados e pelo nível de ruído das curvas de luz disponíveis. O necessário para determinações mais detalhadas da forma (e da variação do albedo na superfície, que é outro fator que pode ser responsável pela variação da refletância do asteróide) é basicamente que se tenha curvas de luz cobrindo de forma razoável diferentes geometrias de observação, o que consiste em ter curvas de luz que permitam obter com precisão o período rotacional e obtidas com uma variação razoável dos ângulos de aspecto (entre a linha de visada e o eixo de rotação) e de fase (entre a linha de visada e a direção do Sol). Magnusson e colaboradores (1989) desenvolveram modelos para a determinação da orientação do eixo de rotação e do ajuste de um elipsóide. Kaasalainen e colaboradores

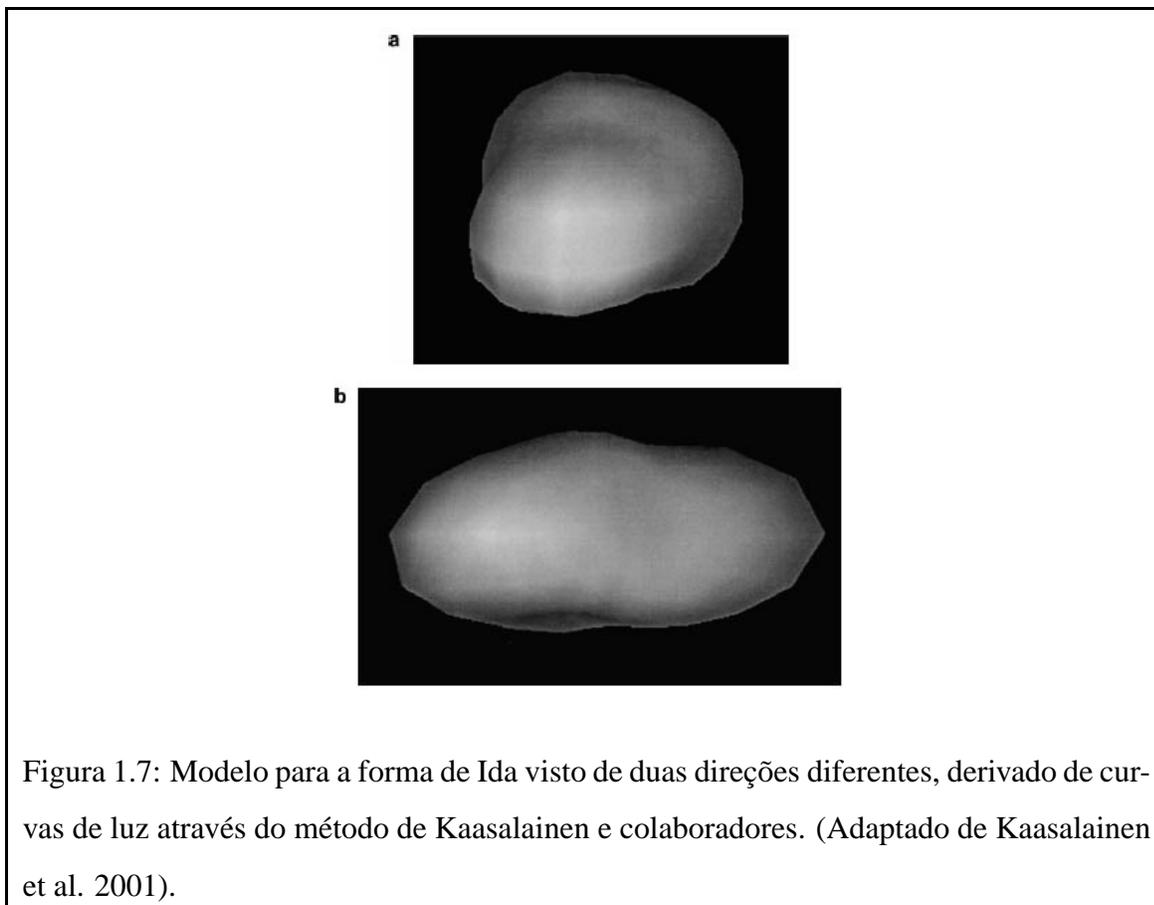


Figura 1.7: Modelo para a forma de Ida visto de duas direções diferentes, derivado de curvas de luz através do método de Kaasalainen e colaboradores. (Adaptado de Kaasalainen et al. 2001).

(Kaasalainen e Torppa 2001, Kaasalainen et al. 2001) desenvolveram um modelo bastante elaborado de inversão de curvas de luz, que levam à obtenção de uma forma convexa arbitrária, e mesmo de algumas não convexas, com um exemplo na figura 1.7.

Ainda assim, são relativamente poucos os asteróides com curvas de luz suficientemente bem cobertas para que se tenha informações de sua forma. Mesmo as estimativas do tamanho, referidas como o diâmetro obtido assumindo uma forma esférica, são em geral imprecisas: o cálculo do diâmetro requer o conhecimento do albedo, que só foi medido para poucos asteróides, e muitas vezes com baixa precisão. As medidas de albedo são em geral obtidas pela observação do asteróide no infravermelho e no visível, e comparando a sua emissão térmica com a luz refletida. A maior parte das medidas fotométricas no infravermelho disponíveis para asteróides foi obtida pelo satélite IRAS. Para a determinação de diâmetros de asteróides sem medidas individuais de albedos (a maioria), usa-se em ge-

ral um albedo médio medido para corpos de espectro semelhante ou pertencentes à mesma família.

Ainda assim, para os corpos com forma conhecida observa-se que são em geral (com exceção dos maiores) bastante achatadas, com razões entre seu eixos principais em torno de 1:0.7:0.5. No caso dos corpos observados de perto por sondas, é ainda bastante comum a presença de grandes deformações como crateras, concavidades e fendas, como foi observado em Mathilde, Eros, Ida, Gaspra, e nos satélites de Marte Phobos e Deimos.

Qualquer corpo rígido tem três direções ortogonais, os seus três eixos principais de inércia, cuja orientação depende apenas de sua distribuição de massa, que definem o seu comportamento rotacional. Para uma forma irregular em geral há apenas três direções possíveis para os eixos principais de inércia, e é apenas em torno de um destes três eixos que um corpo pode girar livremente e sua velocidade de rotação será constante (paralela ao momento angular, que se conserva). Caso o corpo rígido seja colocado em rotação em torno de um eixo que não um eixo principal, sua velocidade de rotação vai necessariamente variar de direção e intensidade. O resultado vai ser um movimento não periódico (referido como rotação complexa). O quanto a velocidade de rotação vai variar é determinado pelo seu desvio inicial de um dos eixos principais, e pela razão dos momentos de inércia de cada eixo.

Estas variações na velocidade de rotação levam a acelerações, e portanto tensões variáveis no interior do corpo rígido para que ele mantenha sua forma. Caso o corpo não seja absolutamente rígido, ocorrerão deformações enquanto ele gira, o que vai levar à dissipação de energia. Como esta dissipação se deve apenas a forças internas o momento angular tem que se conservar, e o resultado nesta redução da energia cinética de rotação será levar o corpo a alinhar o seu eixo de rotação instantâneo com um dos eixos principais, pois nesta configuração há um mínimo de energia cinética (para momento angular constante), e não mais haverá dissipação, pois o eixo de rotação se manterá constante enquanto torques externos não atuarem.

Desta forma, espera-se que um asteróide que tenha rotação complexa (o que pode ter sido o resultado de uma colisão ou de forças de maré) vai dissipar energia e even-

tualmente alcançar uma rotação uniforme. Burns e Safronov (1973) desenvolveram um modelo aproximado para calcular o tempo necessário para que um asteróide deixe ter rotação complexa. O modelo assume uma rotação inicial próxima a um eixo principal de inércia - um ângulo de nutação α pequeno. A taxa de dissipação de energia é obtida a partir da variação da energia cinética de rotação durante um ciclo de rotação; esta energia é armazenada no corpo através das suas deformações causadas pela rotação. São consideradas duas formas de deformação, cada uma sendo responsável por uma parte do armazenamento de energia: a compressão do material e a sua flexão.

Neste modelo, a perda de energia ocorre sempre que ela é armazenada no material, sendo considerada proporcional à quantidade armazenada. Desta forma, sempre que uma quantidade de energia é armazenada no material pela sua deformação, o seu valor é reduzido por uma fração constante, que corresponde à energia perdida por dissipação. O modelo utiliza como parâmetro para definir a quantidade de dissipação um fator Q chamado de fator de qualidade do material, e que corresponde ao inverso da razão de energia dissipada por energia armazenada. Desta forma, um material que armazena energia sem dissipação (como uma mola ideal) tem fator de qualidade infinito, e um material que dissipa toda a energia gasta na sua deformação (deformação plástica) tem fator de qualidade 1. Segundo os autores, valores típicos para os asteróides seriam de 100 a 1000.

O resultado obtido para o tempo necessário para a rotação chegar ao eixo principal de rotação é $\tau = \mu Q / (\rho K_3^2 r^2 \omega^3)$, sendo μ o módulo de cisalhamento (que depende do material) e K_3 uma constante numérica que depende da forma do corpo. Utilizando escolhas extremas para estes valores obtém-se em um extremo $\tau = 4 \times 10^4 (T)^3 / (r)^2 (Km^2 h^{-3}) anos$ e no outro extremo $\tau = 6 \times 10^7 (T)^3 / (r)^2 (Km^2 h^{-3}) anos$.

Desta forma, espera-se que aqueles corpos com tempos de vida colisionais maiores que o tempo de dissipação do seu excesso de energia rotacional sejam observados com rotação em torno do eixo principal de inércia. Neste trabalho também foi calculado o aumento no ângulo de nutação devido ao fluxo de colisões. Assumindo um fluxo isotrópico com projéteis seguindo uma lei de potências para as massas, eles obtiveram que o ângulo de nutação deveria aumentar segundo $\alpha^2 = At$, sendo a constante A determinada pelos

parâmetros do fluxo de colisões. Desta forma, considerando a dissipação de energia e o fluxo colisional, o valor médio do ângulo de nutação seria $\alpha^2 = A\tau/2$.

Na época eram conhecidos os períodos de rotação de poucos asteróides (apenas 64), e em particular não havia períodos muito longos ou de asteróides pequenos, que são os que devem apresentar os maiores tempos de dissipação. Este modelo previa então que todos os asteróides com períodos medidos na época teriam rotação simples (ângulo de nutação pequeno), o que concordava com os dados de curvas de luz disponíveis.

O resultado de vários outros estudos posteriores tem a mesma forma do resultado de Burns e Safronov, variando apenas nas constantes de proporcionalidade. Apenas os trabalhos de Efroimsky e Lazarin (2000) e Efroimsky (2001) discordam deste resultado, argumentando que o modelo é demasiadamente simplificado e que as escolhas dos seus parâmetros não são adequadas. O resultado obtido por estes autores é de tempos de dissipação de 2 a 6 ordens de magnitude mais curtos.

Em 1994, Harris comparou o resultado deste modelo à base de dados então disponível, com mais de 600 períodos, dos quais cerca de 100 foram obtidos de curvas de luz suficientemente detalhadas para permitir concluir que a rotação é simples. A figura 1.8 mostra como estes dados se distribuem em relação aos tempos de dissipação.

Particular atenção foi dada aos objetos com tempos de dissipação suficientemente longos para que se espere que tenham rotação complexa. Dos sete objetos com tempo de dissipação maior que 1 bilhão de anos, para quatro não havia dados suficientes para concluir que a rotação fosse complexa, mas os dados não eram inconsistentes com esta possibilidade. Para os outros três, os dados indicavam uma rotação complexa.

Uma versão mais recente deste gráfico, reproduzida na figura 1.9, foi publicada por Paolicchi, Burns e Weidenschilling (2002). Esta inclui os dados recentemente obtidos (Pravec et al. 2002, Pravec e Harris 2000) de corpos muito pequenos e muito rápidos. Nela estão indicados os 11 corpos conhecidos com rotação complexa; destes, apenas 1 deles tem período de dissipação curto, 2000 WL107. Este é um NEA de 20m de raio, com período de rotação de 20 minutos. Estes corpos têm um tempo de dissipação estimado em 5 milhões de anos. O tempo de vida colisional de um corpo na região do cinturão de

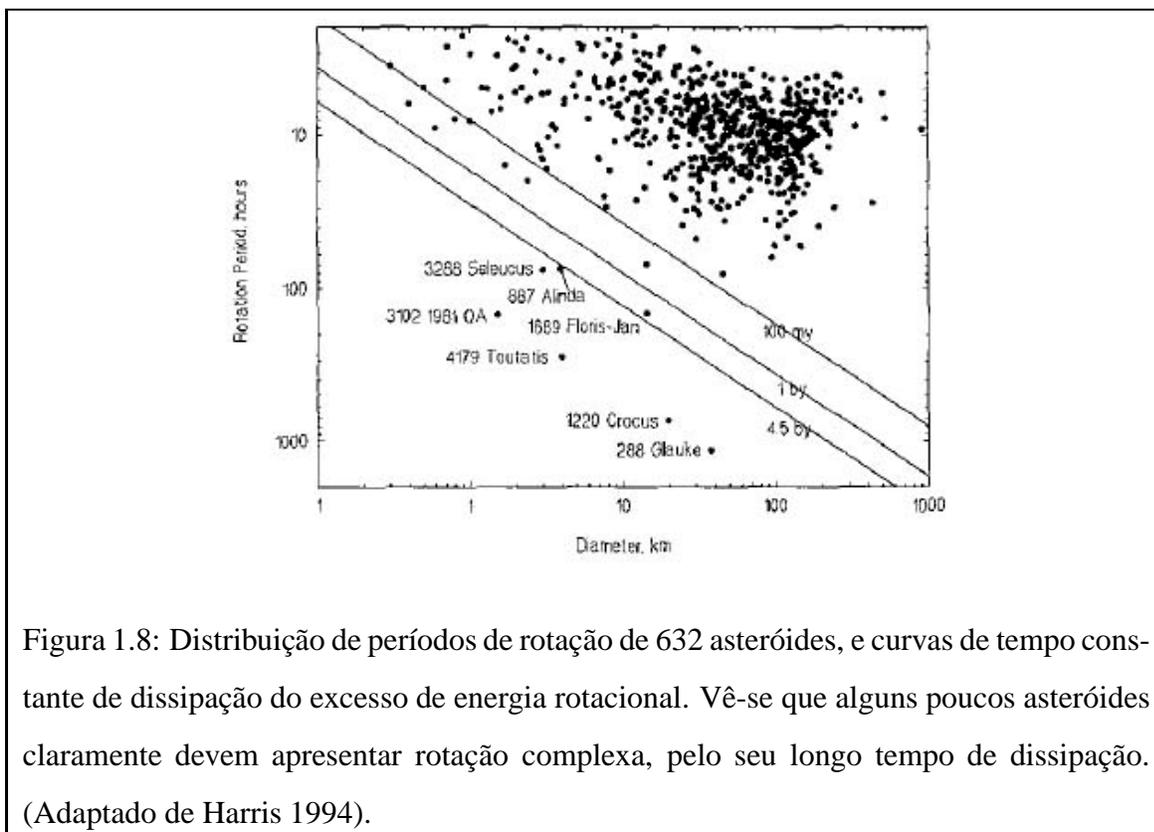
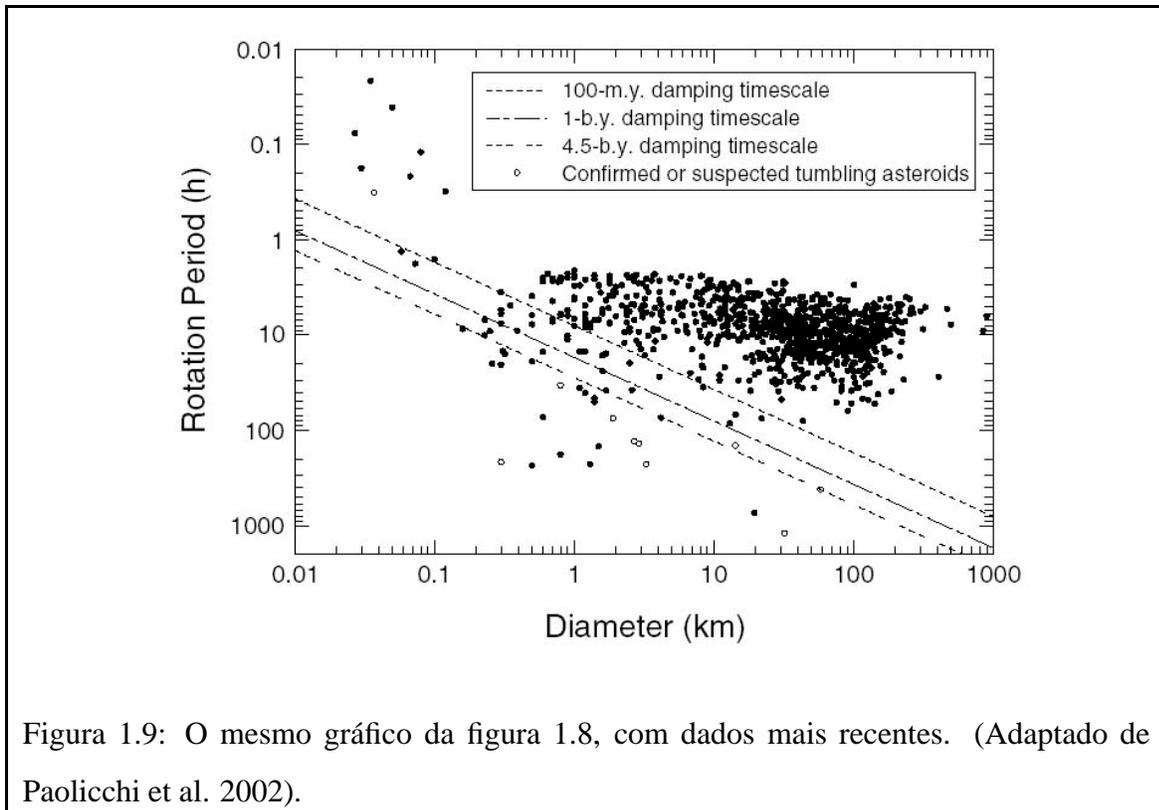


Figura 1.8: Distribuição de períodos de rotação de 632 asteróides, e curvas de tempo constante de dissipação do excesso de energia rotacional. Vê-se que alguns poucos asteróides claramente devem apresentar rotação complexa, pelo seu longo tempo de dissipação. (Adaptado de Harris 1994).



onde se acredita que ele tenha se originado está na faixa 5-20 milhões de anos, de forma que não seria algo inesperado que ele tenha rotação complexa. O resultado de Efroimsky e Lazzarin, no entanto, seria o de um tempo de dissipação de 5×10^4 anos, de forma que seria bastante improvável observar este corpo com rotação complexa.

Em outros trabalhos (Richardson et al. 1998, Scheeres et al. 2000, Scheeres et al. 2002) foi mostrado que encontros próximos e perda de fragmentos podem também levar a um desalinhamento expressivo do eixo de rotação em relação ao momento angular.

Enquanto é comum que seja mencionado que quase todos os asteroides com rotação bem determinada têm rotação simples, é também comum que seja negligenciado o forte efeito de seleção favorecendo esta conclusão, uma vez que caso um asteroide tenha rotação complexa sua variação de brilho devida à rotação (curva de luz) será não periódica (ou quase periódica, apresentando batimentos, caso o ângulo de nutação seja pequeno). Estes asteroides não têm períodos determinados, e para que se possa concluir que a rotação é complexa são necessárias muito mais observações, e em geometrias diferentes. Desta

forma, muitos corpos com rotação complexa podem já ter sido observados, mas ainda não o suficiente para que se possa ter um período aproximado de rotação, de forma que nem estariam presentes em gráficos como o da figura 1.9.

Ainda deve ser considerado o fato de o tempo de dissipação ser maior para corpos menores, o que faz com que a grande maioria dos corpos bem observados tenha tempo de dissipação curto, e portanto sejam esperados de estar em rotação simples. Um indicativo desta tendência é o fato de 8 dos 11 corpos conhecidos com rotação complexa serem NEA.

Ainda é necessário um estudo que tente considerar estas tendências para concluir o quão raros são os corpos com rotação complexa, e se a sua frequência corresponde ou não à esperada considerando os seus tempos de vida colisional e de alinhamento do eixo de rotação. Outro fato pouco considerado ao discutir a presença (ou ausência) de corpos com rotação complexa é que os tempos calculados por Burns e Safronov foram obtidos para corpos monolíticos, e não há estimativas de tempo de relaxação para corpos reacumulados, mesmo com a atual constatação de que estes são comuns. Em geral não é levado em consideração que a falta de rotação complexa pode se dever à presença comum de corpos reacumulados, que seriam muito menos capazes de sustentar rotação variável.

Com relação à evolução da rotação de um asteroide à medida que ele sofre colisões, o modelo padrão, e um dos únicos trabalhos analíticos já realizados é o de Harris, de 1979. Este modelo e seus resultados serão descritos em mais detalhes no capítulo 3. De uma forma resumida, o modelo de Harris consiste em colisões entre alvos esféricos com projéteis distribuídos segundo uma lei de potências de tamanho e a uma velocidade fixa e com direções dos impactos isotropicamente distribuídas. O modelo incorpora o aumento de velocidade de rotação devido ao acréscimo de momento angular e a diminuição na velocidade de rotação devida ao aumento do momento de inércia, no que ele difere dos modelos previamente existentes. Enquanto os modelos anteriores (Napier e Dodd 1974, Dohnananyi 1976) previam que a velocidade de rotação deveria aumentar indefinidamente (com o tempo), no modelo de Harris a rotação se estabilizaria em um valor constante em relação ao raio para os corpos grandes, aumentando indefinidamente (em função do raio)

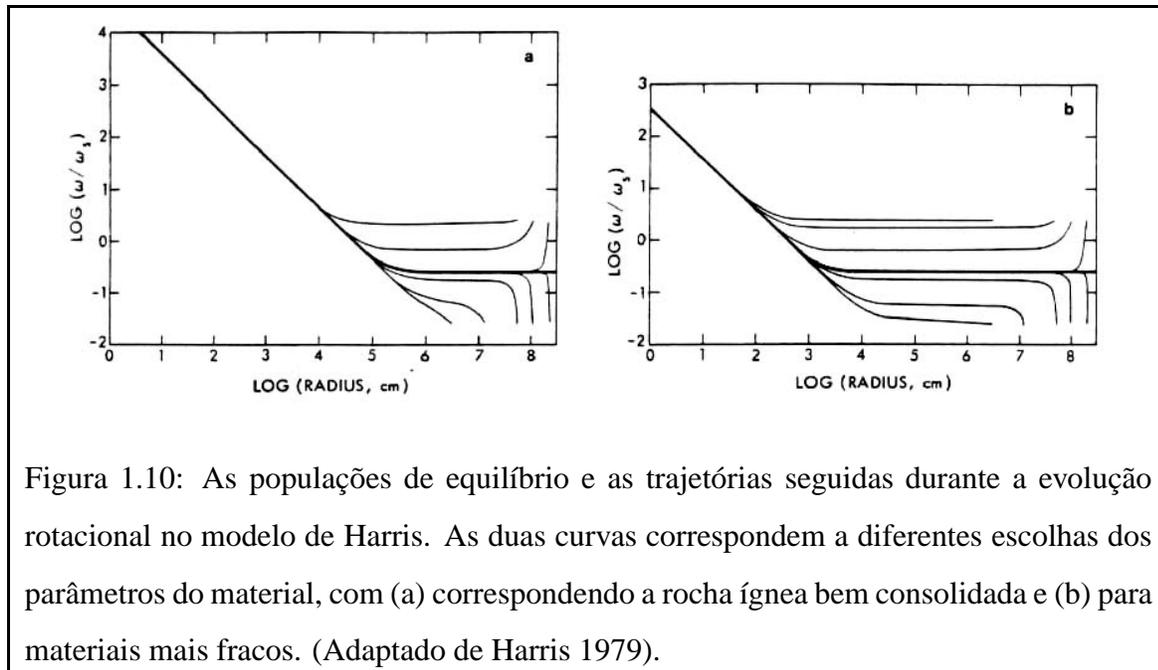


Figura 1.10: As populações de equilíbrio e as trajetórias seguidas durante a evolução rotacional no modelo de Harris. As duas curvas correspondem a diferentes escolhas dos parâmetros do material, com (a) correspondendo a rocha ígnea bem consolidada e (b) para materiais mais fracos. (Adaptado de Harris 1979).

para corpos pequenos, como pode ser visto na figura 1.10.

Posteriormente (1990), Harris publicou uma revisão dos resultados deste modelo considerando a possibilidade de formas não esféricas para o alvo, e encontrou que os resultados não variam de forma significativa, pois ao permitir que os corpos variem o seu achatamento o seu momento de inércia varia de forma não muito diferente da variação do parâmetro de impacto médio. Assim, um corpo mais oblato que uma esfera tem momento de inércia maior, mas também o parâmetro de impacto médio é maior, de forma que mais momento angular é transferido em uma colisão, resultando em uma variação da velocidade de rotação semelhante à do caso esférico.

1.3 Evolução colisional de asteróides

Vários estudos numéricos foram realizados para simular uma população de corpos colidindo entre si, fragmentando-se e transferindo massa e momento angular no processo. O trabalho clássico de Dohnanyi (1969) obtém analiticamente a distribuição de tamanhos de uma população de asteróides em equilíbrio colisional. Cada asteróide está su-

jeito a colisões com os outros asteróides da população; após uma colisão o tamanho do alvo é reduzido e são gerados fragmentos de tamanho correspondente. O resultado de Dohnanyi é uma distribuição final de tamanhos seguindo uma lei de potências da forma $n(m) = Am^{\beta-1}$, sendo $n(m)$ o número de fragmentos com massa maior que m , e o índice β tendo um valor de $11/6$ (1.833). Este valor concordava bem com um ajuste para os asteróides então conhecidos, que levava a uma potência 1.839.

Posteriormente foram realizados vários estudos semelhantes a este, mas realizados de forma numérica, para permitir a obtenção da solução utilizando quantidades discretas de asteróides e incorporar modelos mais elaborados para determinar os resultados das colisões individuais. Uma revisão atual da grande variedade de modelos desenvolvidos é a de Davis et al. (2002).

Estes modelos partem de uma população inicial, que é dividida em vários de intervalos de raio. Para cada intervalo calcula-se a probabilidade de colisão de um alvo de tamanho médio; o número de colisões em cada intervalo (n_{col}) é em geral tomado simplesmente como a probabilidade de colisões multiplicada pelo número de asteróides. São então realizadas n_{col} colisões com alvos escolhidos ao acaso, e projéteis vindos dos intervalos de diâmetros menores, limitados em geral pelo diâmetro do projétil capaz de levar a uma fragmentação catastrófica. Usa-se algum modelo do tipo lei de escalonamento para obter o resultado da colisão, em geral apenas como o número e tamanho dos fragmentos gerados e a diminuição do raio do alvo em função da energia. São então eliminados de seus intervalos o alvo e o projétil utilizados, que são adicionados aos intervalos de tamanho correspondentes os fragmentos gerados. Este processo é repetido até que a distribuição de tamanhos da população se estabilize. Em cada intervalo de tamanhos o número de asteróides vai diminuir pelo uso de seus membros como projéteis para alvos maiores e pela saída de seus membros que ao sofrerem colisões diminuem de tamanho o suficiente para serem deslocados para um intervalo de tamanhos menores. E em cada intervalo ocorre um aumento no número de seus elementos pela entrada de fragmentos gerados em colisões de alvos maiores. Quando as taxas de perda e ganho de asteróides se estabilizam (ou variam lentamente) em todos os intervalos, diz-se que a população atingiu o seu equilíbrio

colisional.

As diferenças entre os vários modelos deste tipo (Davis et al. 1979, Davis et al. 1989, Durda et al. 1998, Gil-Huton e Brunini 1999, Campo-Bagatin e Petit 2001) estão principalmente nas populações iniciais e na lei utilizada para prever os resultados das colisões. As populações iniciais em geral são variadas de forma a procurar a que leva à população final com a maior semelhança à população de asteróides observada atualmente. Deve ser notado, no entanto, que o resultado de Dohnanyi é uma população de equilíbrio independente da inicial, para uma grande variedade de condições iniciais. As leis para obter o resultado de cada colisão são derivadas dos resultados de diferentes estudos de laboratório ou teóricos.

Apenas no trabalho de Tanga e colaboradores (1999) se começou a incluir nestes modelos o efeito da geometria da formação de fragmentos. Até então, a formação de fragmentos era definida apenas a partir da sua massa, sem considerar se haveria ou não espaço para que estes se formassem dentro do seu progenitor com formas convexas. Este trabalho calcula as distribuições de tamanho resultantes simplesmente da divisão dos alvos partindo de um certo tamanho para o maior fragmento e então dividindo o espaço restante nos maiores corpos convexas possíveis. Apesar de não serem feitas quaisquer considerações provenientes de modelagens de impactos para a distribuição e forma dos fragmentos, foram encontradas distribuições razoavelmente semelhantes às observadas no Cinturão, cuja inclinação é maior que as obtidas das modelagens anteriores que partiam apenas de considerações de energia e massa.

Além da distribuição atual de tamanhos dos asteróides, há outros vínculos a serem satisfeitos. Um importante é a crosta basáltica de 4 Vesta. Por ser fina e ser a camada superficial de um corpo diferenciado, é uma indicação que Vesta sobreviveu sem colisões capazes de remover totalmente sua crosta, apesar da observação de uma grande cratera em sua superfície. Vesta tem ainda a particularidade de ser o único asteróide grande (com 468Km, é o terceiro maior, após 1 Ceres e 2 Pallas) com superfície basáltica. Quase todos os outros asteróides de tipo basáltico conhecidos (tipo morfológico V) são membros da família de Vesta, que são pequenos (menores que 10Km) o suficiente para que possam ter

se originado de colisões com Vesta. Por outro lado, há também vários corpos grandes com altos albedos e espectro plano, o que se acredita ser devido a uma composição metálica, sendo o maior deles o asteroide 16 Psyche. Corpos metálicos deveriam ser os núcleos de corpos diferenciados, expostos por meio de colisões.

Desta forma, um modelo de evolução colisional para o Cinturão não deve levar a uma alta probabilidade de que Vesta tenha sofrido colisões fortes o suficiente para remover sua crosta. Mas para explicar os asteroides metálicos colisões catastróficas com corpos grandes também não podem ser incomuns, embora haja poucos asteroides com tamanho suficiente para levar a uma fragmentação catastrófica de um asteroide grande. Por outro lado, a maior parte de um corpo diferenciado deveria corresponder ao seu manto, e há poucos asteroides observados com espectros compatíveis com uma composição de manto.

Outro vínculo para a obtenção da população inicial do Cinturão é a distribuição radial de massas no Sistema Solar. Como foi notado em Weidenschilling 1977 (figura 1.11), parece haver uma falta de massa na região do Cinturão. Para uma distribuição contínua, como seria esperado na nebulosa que deu origem ao Sistema Solar, a massa do Cinturão seria cerca de 1 massa terrestre, 1000 vezes a massa atualmente observada. Se esta grande perda de massa ocorreu no regime atual de colisões ou foi o resultado de algum outro processo anterior ainda é uma questão sendo debatida.

A distribuição atual de tamanhos está representada na figura 1.12, onde a população é completa até 44Km, com a população estimada até 0.4Km.

Um mecanismo importante para a evolução colisional da rotação foi modelado em Dobrovolskis e Burns 1984 e Cellino et al. 1990, e consiste da perda de momento angular pelo escape de fragmentos. O modelo de drenagem de momento angular de Dobrovolskis e Burns é baseado no escape de fragmentos ocorrer preferencialmente para os ejetados na direção da rotação, pois estes têm uma velocidade maior. O resultado deste modelo é que colisões nas quais todos os fragmentos gerados são perdidos não alteram a rotação, pois neste caso a velocidade de rotação não é capaz de selecionar os fragmentos ejetados. Desta forma, o efeito da drenagem de momento angular é mais pronunciado nas colisões nas quais os fragmentos são ejetados com velocidades próximas da velocidade de escape,

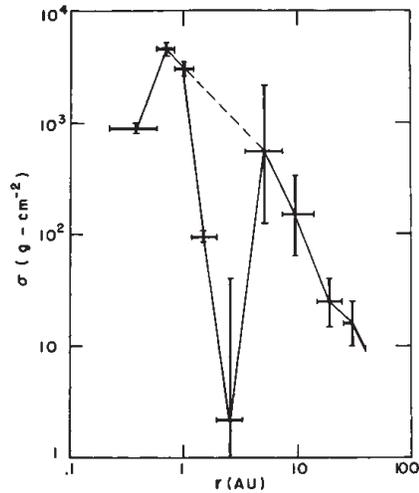


Figura 1.11: Densidade superficial para a nebulosa que formou o Sistema Solar (linha tracejada), obtida acrescentando elementos leves à massa atual até obter o padrão solar de abundâncias, comparada à densidade observada hoje (linha contínua). (Adaptado de Weidenschilling 1977).

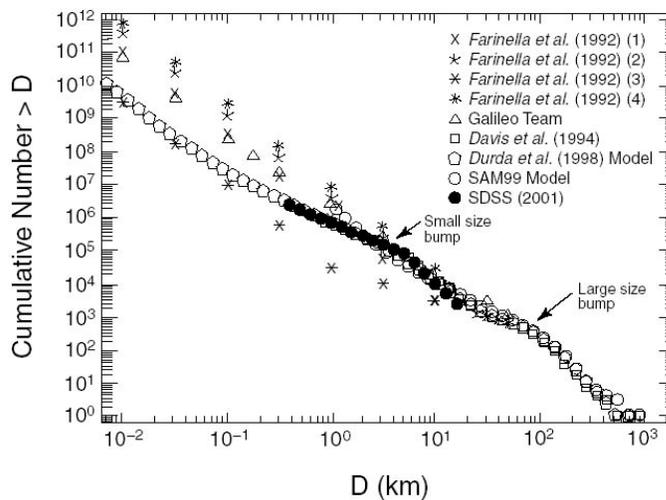


Figura 1.12: Alguns modelos diferentes para a distribuição observada de asteróides. Os modelos diferem na região de pequenos tamanhos, onde os dados disponíveis não compreendem toda a população, e alguma extrapolação tem que ser feita. (Adaptado de Davis et al. 2002).

para que a diferença trazida pela velocidade de rotação seja suficiente para fazer com que escapem os fragmentos ejetados na direção da rotação e os demais sejam reacumulados, resultando em uma desaceleração. O modelo de Cellino e colaboradores foi chamado de "espalhamento de momento angular" (*angular momentum splash*) e consiste em um mecanismo semelhante, mas para impactos catastróficos, enquanto o modelo de Dobrovolskis e Burns é para o regime de craterização. Este mecanismo foi incorporado no modelo de Farinella e colaboradores (1992) para a evolução combinada dos tamanhos e taxas de rotação de uma população de asteróides. Segundo os autores, a faixa de tamanhos para a qual este mecanismo seria mais eficiente é a de 100-150Km, o que poderia explicar o mínimo observado na velocidade de rotação dos asteróides nesta faixa de tamanho - em contraste com a velocidade constante com o tamanho que é o resultado do modelo de Harris.

O problema com este tipo de modelagem, como notado em Davis et al. (2002), é que todos estes modelos dependem de uma série de parâmetros que não são conhecidos, e que ao serem ajustados permitem que se reproduza as distribuições observadas nos asteróides. Por esta razão há uma grande variedade de conclusões diferentes, não sendo possível identificar qual dos processos modelados é responsável pela distribuição observada de tamanhos e velocidades de rotação. Apenas com uma melhor compreensão dos resultados das colisões individuais será possível obter resultados menos ambíguos. Em particular, com a recente constatação de que corpos reacumulados são comuns e respondem de forma significativamente diferente a impactos, é necessário compreender melhor os efeitos deste tipo de estrutura sobre os resultados de colisões e incluir estes corpos nas modelagens de populações. Em corpos reacumulados a rotação pode ter uma maior importância, uma vez que muitos asteróides são observados com velocidades próximas ao limite para corpos sem coesão, sendo então necessário estudar mais detalhadamente a interação entre rotação e colisões.

1.4 Experimentos de laboratório

Um dos métodos para entender o resultado de colisões com asteróides é a realização de experimentos de laboratório. O principal objetivo destes trabalhos é determinar a dependência dos resultados da colisão (distribuição de tamanhos, velocidades e formas dos fragmentos) com os parâmetros que a definem, como tamanho do alvo e velocidade e energia de impacto. Apesar de ter se obtido vários resultados confiáveis nestas questões, o ponto mais incerto para a aplicação destes resultados a asteróides é a determinação da dependência dos resultados da colisão com o tamanho, e a sua validade para a enorme extrapolação necessária para ir dos tamanhos dos alvos de laboratório (da ordem de 10cm) aos de asteróides observados (de centenas de metros a centenas de quilômetros). Por outro lado, por mais incerta que seja a aplicação dos modelos de fragmentação, para estudar a fragmentação de asteróides eles são um ponto de partida bastante razoável.

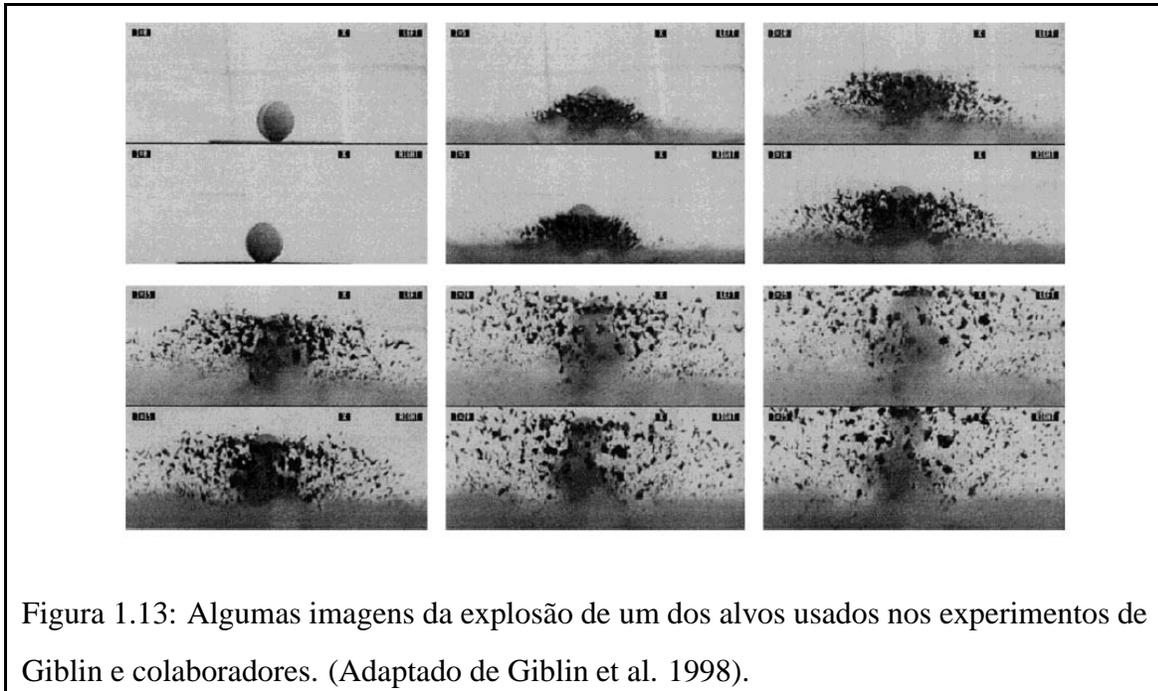
Há uma série de problemas com relação a essa extrapolação: sabe-se que nos alvos de laboratório a sua gravidade é imperceptível, enquanto para os asteróides maiores com certeza a gravidade será importante para determinar o resultado da fragmentação. Adicionalmente, a escala de tamanho do alvo é importante para determinar como as suas forças internas de coesão atuam, de forma que independentemente da gravidade um alvo grande deve se fragmentar de forma diferente. Mesmo que os experimentos de laboratório reproduzissem os mesmos processos físicos que os atuantes nos asteróides, apenas o fato de uma extrapolação tão grande ter que ser realizada implica em grandes incertezas, e não só por pequenas imprecisões nas medidas de laboratório se propagarem para grandes erros na faixa de tamanho dos asteróides, mas por ser possível (e de fato é esperada) uma mudança de regime ao realizar esta transição de tamanhos.

Sabe-se que ao ir dos tamanhos de laboratório aos de asteróides haverá uma transição do regime de coesão para o regime gravitacional, mas o tamanho no qual ocorre esta transição é uma das questões mais antigas e ainda não respondidas na fragmentação de asteróides. Argumentos observacionais, como descontinuidades da distribuição de períodos de rotação ou de tamanhos dos asteróides observados e de estudos numéricos já foram

aplicados para defender a transição a faixas de tamanho tão diversas como 100-150Km (Dermott et al. 1984), 2-50Km (Harris 1979) e 0.1-10Km (Benz e Asphaug 1999).

Um grande número de trabalhos já foi realizado. Revisões detalhadas complementares são feitas em Fujiwara et al. 1989 e Holsapple et al. 2002. Experimentos foram realizados com velocidades comparáveis às velocidades típicas de colisões de asteróides (5Km/s), já tendo sido usadas velocidades de 1 a 7 Km/s. A limitação do tamanho do alvo é dada em geral pela limitação do tamanho do projétil que pode ser acelerado a estas velocidades. Como se procura estudar em geral fragmentações catastróficas (nas quais o maior fragmento resultante tem massa inferior à metade da massa do alvo), a limitação de tamanho e velocidade do projétil determina o tamanho máximo de alvo a ser usado que ainda vai levar a uma fragmentação catastrófica. Os alvos resultantes são em geral da ordem de 10cm de diâmetro, sendo a forma esférica a mais comum. Outra opção, que permite energias maiores é o uso de explosivos, que foram usados, por exemplo, em Giblin et al. (1994 e 1998). Segundo alguns autores que compararam os resultados de colisões com os de explosões (Ryan, 1992) utilizando-se profundidades adequadas para os explosivos pode-se obter resultados semelhantes aos que se teria para uma colisão com a mesma densidade de energia e velocidade de impacto semelhante à velocidade de propagação da explosão.

O método para obtenção do movimento dos fragmentos consiste basicamente na filmagem com câmeras de alta velocidade (de centenas a milhares de quadros por segundo). A obtenção de medidas mais precisas e para um maior número de fragmentos só foi possível nos trabalhos mais recentes, graças à disponibilidade de tratamento e análise de imagens por computador, o que era até a última década essencialmente impossível por limitações de tempo de processamento e, principalmente, da grande quantidade de dados gerada. Em particular, por esta razão não havia até os trabalhos mais recentes medidas de velocidades de rotação e das velocidades em três dimensões, que exige filmagem com múltiplas câmeras e uma análise de dados muito mais elaborada, para identificar os mesmos fragmentos em imagens diferentes. Por estas razões, os dados mais abundantes de laboratório se referem à distribuição de tamanhos e formas dos fragmentos gerados (as formas geral-



mente medidas como elipsóides aproximados, tomando como eixos principais os lados do menor paralelepípedo que contém o fragmento), uma vez que estas medidas são obtidas ao recolher os fragmentos ao final do impacto. Em particular, as medidas com fragmentos coletados são possíveis com maior completeza e precisão que nas imagens, principalmente para os pequenos fragmentos, que são ejetados a altas velocidades (centenas de metros por segundo). Algumas ilustrações destas experiências estão na figura 1.13. Na figura 1.14 são mostradas algumas trajetórias reconstituídas de Giblin et al. (1998).

Um dos experimentos mais bem sucedidos para a obtenção de velocidades foi o de Giblin e colaboradores (1994, 1998), que utilizou explosões em alvos de cimento 21cm de diâmetro, realizadas ao ar livre, para observar os movimentos por um período maior. Nos experimentos realizados em câmaras fechadas, (como os de Nakamura e Fujiwara 1991, Davis e Ryan 1990, Ryan et al. 1991 e Davis et al. 1991) o tempo até que os fragmentos atinjam as paredes da câmara é em geral muito curto para permitir medir as velocidades de muitos fragmentos. A desvantagem dos experimentos ao ar livre é a perda da maioria dos fragmentos finos, levando a uma perda total da ordem de um terço da massa, o que não ocorre nas experiências em câmaras fechadas. Estas últimas, por outro lado, têm

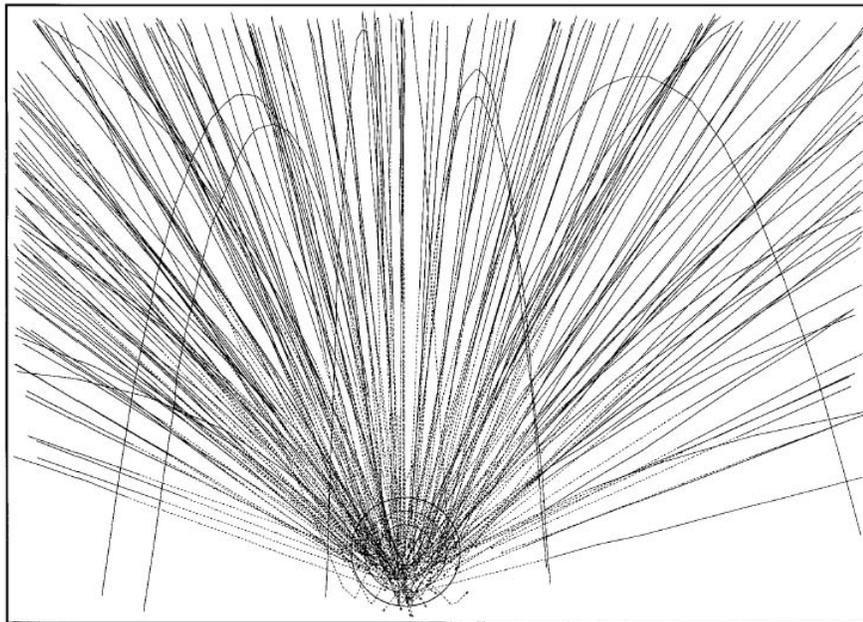


Figura 1.14: Algumas trajetórias reconstituídas de fragmentos gerados em uma das explosões do trabalho de Giblin e colaboradores. (Adaptado de Giblin et al. 1998).

mais problemas de fragmentação secundária, que ocorre quando os fragmentos atingem as paredes da câmara. Desta forma, são duas categorias complementares de experimentos.

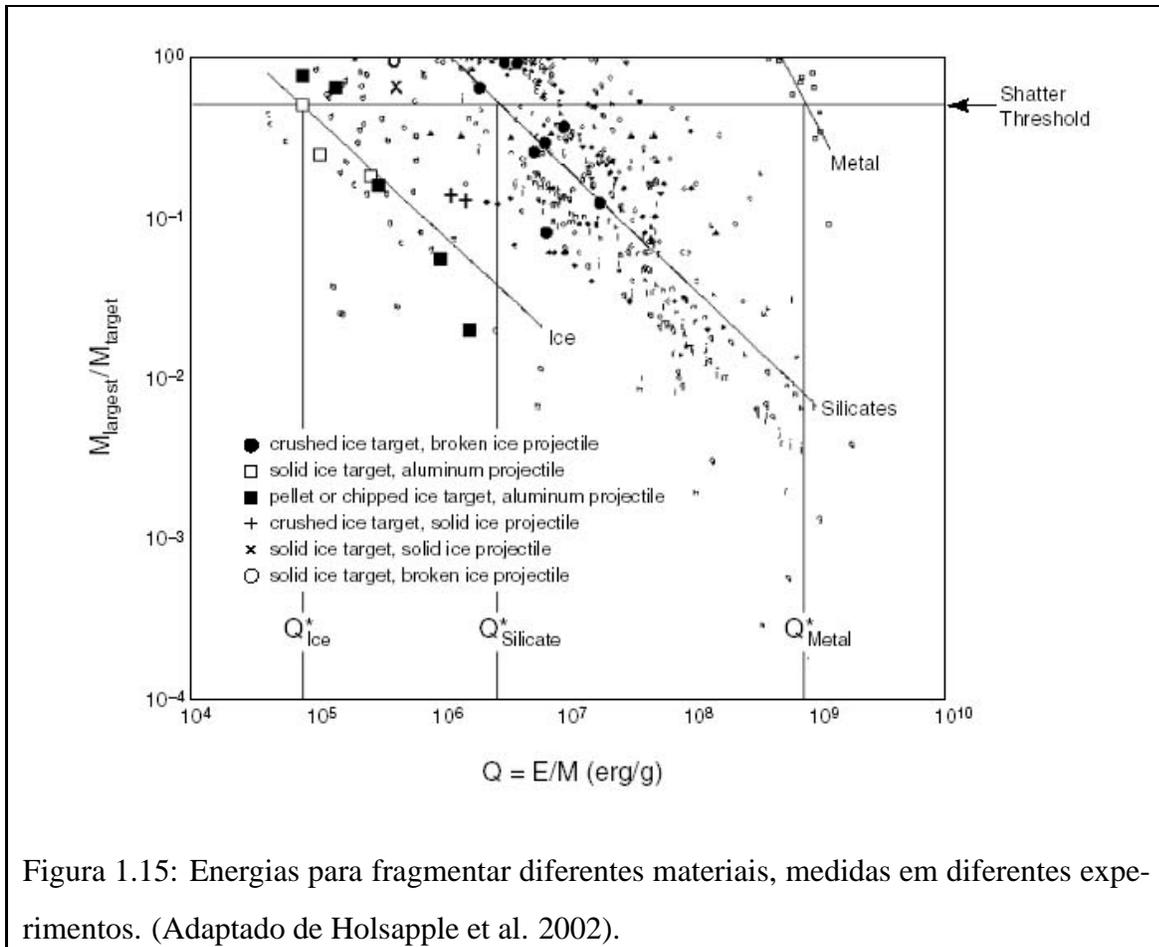
Quanto ao tipo de alvos, já houve uma grande variedade. Já foram usados alvos metálicos, de vidro, gelo, basaltos, granitos, cimento. Embora alvos homogêneos sejam os mais comuns, já foram usados também alvos formados por várias camadas concêntricas diferentes (para simular corpos diferenciados) e corpos formados pela aglutinação de fragmentos, tanto regulares como alvos reconstruídos após um impacto, de forma a simular corpos reacumulados. Recentemente, este tipo de corpo, e alvos mais porosos têm sido mais usados, devido à constatação de que este tipo de estrutura deve ser comum nos asteroídes.

De forma a tentar incluir os efeitos da compressão gravitacional, alguns experimentos foram feitos em ambientes pressurizados e em centrífugas. O problema com ambos é que a compressão gerada não tem a mesma variação espacial que a gravidade. No primeiro caso, após formado cada fragmento recebe a mesma pressão que na superfície do alvo,

enquanto ela deveria depender da posição e do tamanho de cada fragmento. No segundo caso, a força centrífuga é mais semelhante à gravidade na sua forma de atuação, mas nestes experimentos a aceleração "gravitacional" é constante em direção e intensidade, enquanto no asteróide ela varia significativamente. De uma forma geral, o resultado destes experimentos foi um aumento nas energias necessárias para a fragmentação catastrófica, e a formação de fragmentos maiores.

O resultado mais importante, e o mais comum, obtido em laboratório é que a principal variável determinando o resultado da fragmentação é a energia específica do evento, definida como a energia (cinética do impacto, ou a liberada pelo explosivo) dividida pela massa do alvo. Por esta razão esta é a principal variável usada nas leis de escalonamento para tentar realizar as extrapolações, e para medir a energia necessária para a fragmentação catastrófica de um corpo. A figura 1.15 mostra alguns resultados de vários experimentos, com diversos tipos de materiais, para a relação entre a massa relativa do maior fragmento e a energia específica do impacto.

De uma forma geral, foi observado que as características do projétil só são importantes em baixas velocidades (menores que 1Km/s), enquanto para altas velocidades apenas a energia do impacto é importante. Este resultado é compreensível, ao se considerar que em altas velocidades o tamanho do projétil é muito menor que o do alvo (para fornecer a mesma energia), de forma que para o alvo o impacto é um evento pontual. De fato, a suposição de um impacto pontual foi usada no desenvolvimento de um modelo para fragmentação (Holsapple 1987, 1993). A maior simplificação obtida ao considerar o impacto como pontual é a simplificação geométrica para a modelagem do alvo e a independência dos parâmetros do projétil. É este também o motivo para que haja uma equivalência aproximada entre resultados de explosões e impactos. Outra observação comum obtida destas experiências é que o efeito de variar o ângulo de impacto é, para ângulos não muito grandes, apenas de reduzir a eficiência do impacto; apenas em ângulos grandes os efeitos geométricos começam a provocar uma fragmentação significativamente diferente. A interpretação para a causa desta independência dos resultados do impacto, segundo o modelo de evento pontual, é que em impactos de alta velocidade a maior parte



da fragmentação é provocada pela onda de choque que se propaga pelo alvo, e não pelo contato direto com o projétil, que é muito pequeno e se desfaz rapidamente.

Ao comparar impactos com alvos monolíticos e com alvos previamente fraturados, foi observada em geral uma resistência à fragmentação semelhante para ambos, embora os alvos prefaturados tenham uma resistência estática à compressão menor que a dos alvos intactos. Também foi notada uma diferença significativa nas velocidades de ejeção, maiores que para os alvos intactos. Resultados semelhantes a estes foram observados em impactos com alvos de alta porosidade. Experimentos com alvos porosos são os mais recentes, sendo alguns exemplos os de Kawakami et al. (1991), Nakamura et al. (1992) e Ryan et al. (1999). De uma forma geral, em alvos porosos foi observado que estes apresentam resistência ao impacto semelhante ou superior à de alvos de baixa porosidade, enquanto sua resistência a esforços lentos (tanto de compressão, tração ou cisalhamento) são significativamente menores (chegando a duas ordens de magnitude para silicatos). Alguns experimentos mostraram velocidades de ejeção menores nos alvos porosos.

A figura 1.16, do trabalho de Nakamura et al. (1989), mostra os tipos básicos de fragmentação observados: há dois regimes diferentes de fragmentação, que diferem na velocidade do projétil. Para baixas velocidades, há a formação de fragmentos cônicos, com vértice no ponto de impacto. Para altas velocidades, a fragmentação resulta no maior fragmento sendo o núcleo, e a camada externa a ele sendo fracionada em pequenos fragmentos. A distribuição de tamanhos é tradicionalmente ajustada por leis de potência, com dois ou três segmentos de inclinações diferentes; esta divisão é em geral o resultado de diferentes regimes de fragmentação prevalecendo para diferentes tamanhos.

Com relação à velocidade de ejeção dos fragmentos, verifica-se em geral que os fragmentos formados próximos ao ponto de impacto são ejetados a altas velocidades, na direção do impacto. Os outros fragmentos têm velocidades menores, com o mais lento sendo o núcleo (que é também o de maior massa). As distribuições de velocidade apresentam os menores fragmentos com velocidades médias maiores, mas também com uma maior dispersão. De uma forma geral as dispersões são grandes, de forma que ajustes de curvas são incertos, como ilustrado na figura 1.17. A eficiência de transferência de

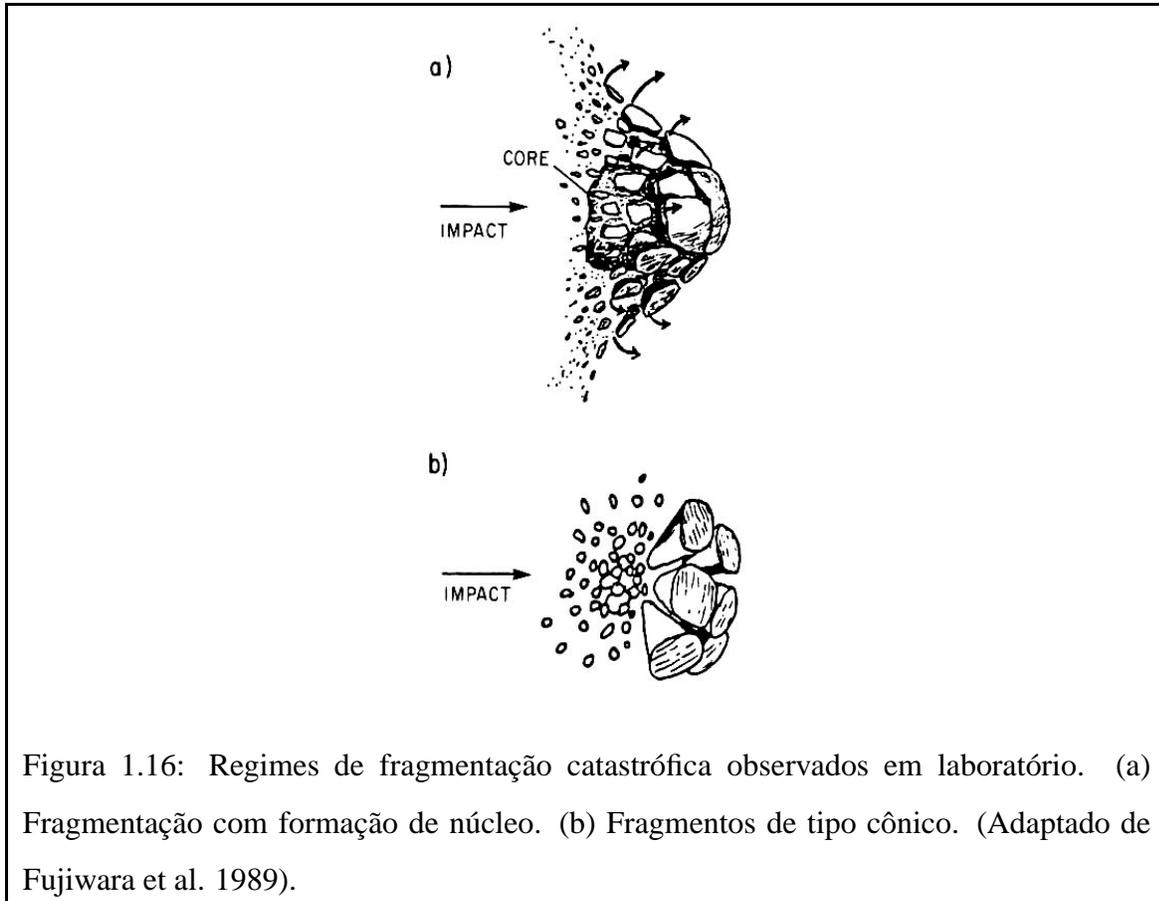


Figura 1.16: Regimes de fragmentação catastrófica observados em laboratório. (a) Fragmentação com formação de núcleo. (b) Fragmentos de tipo cônico. (Adaptado de Fujiwara et al. 1989).

energia é observada sempre na faixa de 1 a 10%.

A rotação dos fragmentos é um dos dados menos analisados em laboratório, principalmente por ser um dos dados mais difíceis de ser obtidos, dependendo de identificar e resolver bem cada fragmento em várias imagens seguidas. Em alguns experimentos foi observado que alguns fragmentos se dividem após a sua ejeção devido à sua rotação, mas sem que fosse possível obter detalhes sobre a frequência deste fenômeno. Em geral foi observado que os fragmentos formados próximos ao ponto de impacto têm as maiores velocidades de rotação; para a distribuição por tamanhos, há um grande espalhamento, mas uma fraca tendência a rotação mais rápida para os menores. Em geral não é possível observar a rotação detalhadamente o suficiente para concluir sobre rotação simples ou complexa. Quanto à distribuição de velocidades, em geral foi observado um excesso de fragmentos lentos e rápidos em relação a uma maxwelliana, mesmo havendo uma forte seleção contra a medida de rotações muito lentas, como mostrado na figura 1.18. Até o momento não foram publicados resultados de experimentos com alvos em rotação.

Tradicionalmente a distribuição das velocidades de rotação dos asteróides é comparada a maxwellianas, que seriam as distribuições esperadas para uma população em equilíbrio colisional. Este ajuste se aplica razoavelmente para os corpos maiores que 40Km, caso se utilize o desvio em relação à média, uma vez que a média varia bastante para os corpos grandes, como discutido anteriormente. Para corpos menores, observa-se em geral excessos de corpos com rotação muito lenta e muito rápida, como mostrado na figura 1.19. Tradicionalmente, argumenta-se que esta diferença resulta de os asteróides maiores serem corpos primordiais, enquanto os menores seriam fragmentos originados em colisões. Embora atualmente ainda não seja possível confirmar nem rejeitar esta explicação, alguns autores (Farinella et al. 1981) já se manifestaram contra a noção de que uma população em equilíbrio deveria ser maxwelliana, argumentando que esta conclusão é demasiadamente simplística, e deveria se aplicar apenas a sistemas de corpos pequenos, nos quais não é importante a sua estrutura interna.

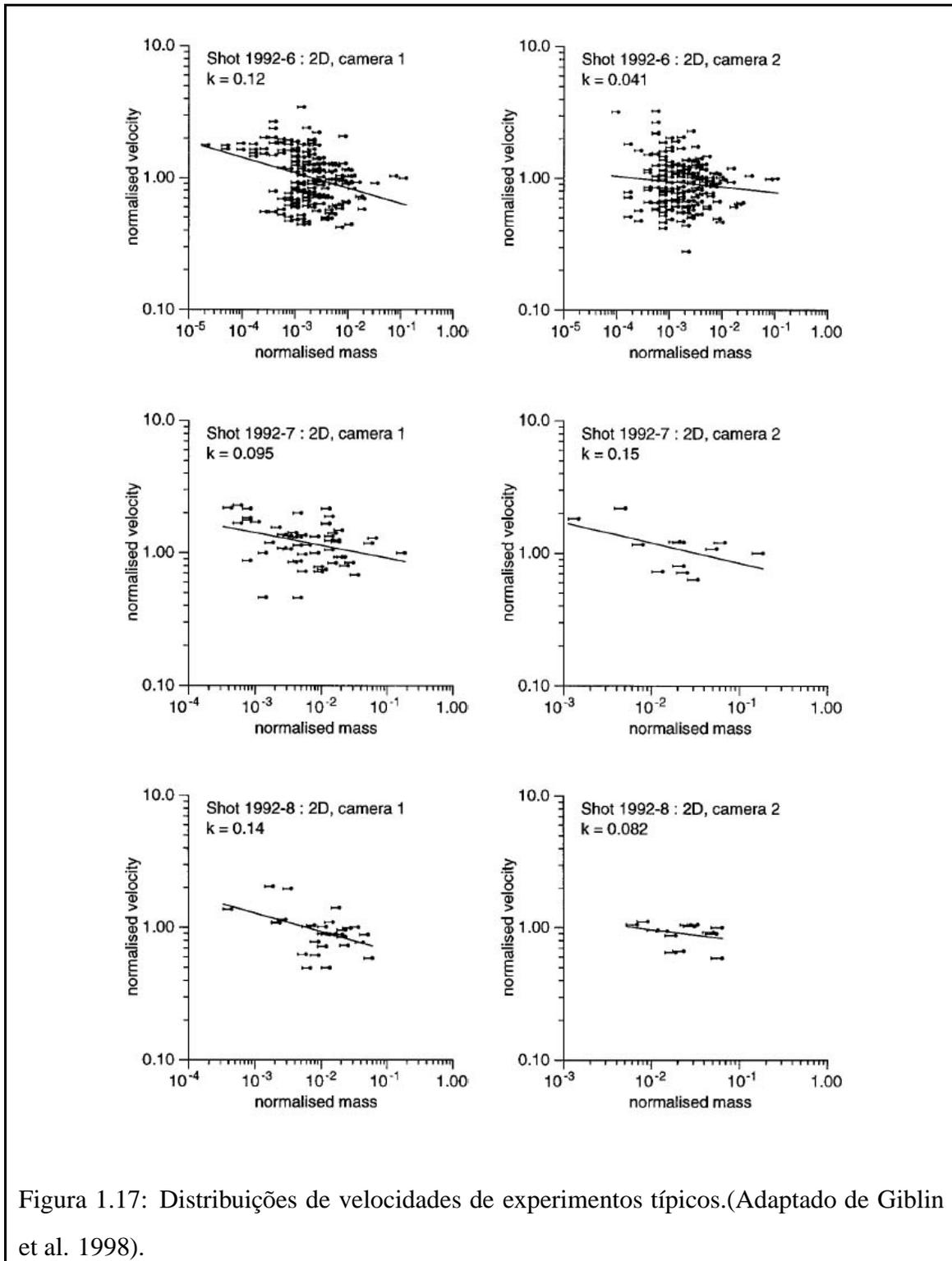


Figura 1.17: Distribuições de velocidades de experimentos típicos.(Adaptado de Giblin et al. 1998).

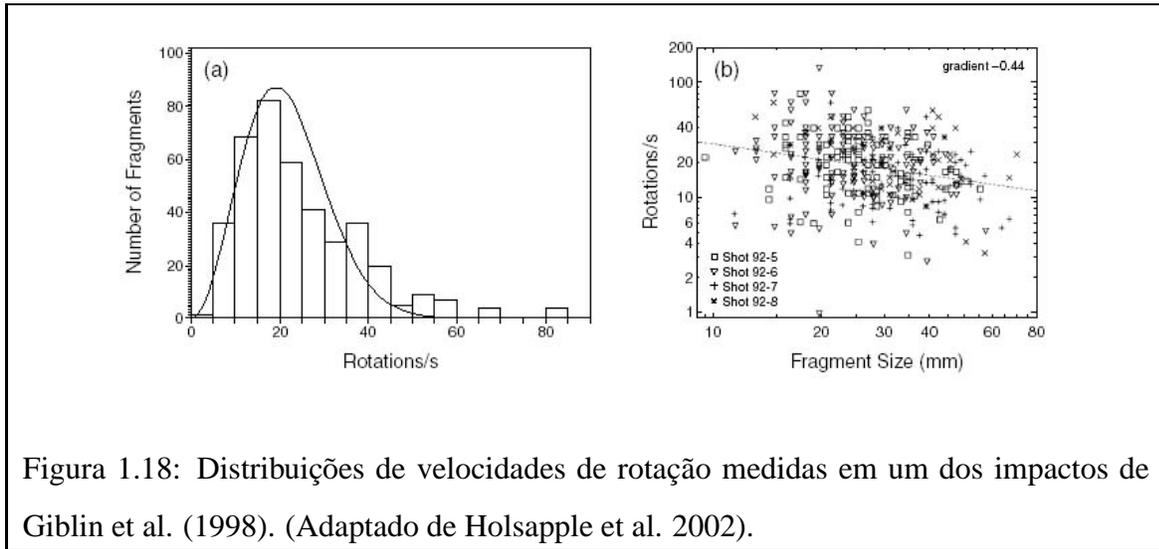


Figura 1.18: Distribuições de velocidades de rotação medidas em um dos impactos de Giblin et al. (1998). (Adaptado de Holsapple et al. 2002).

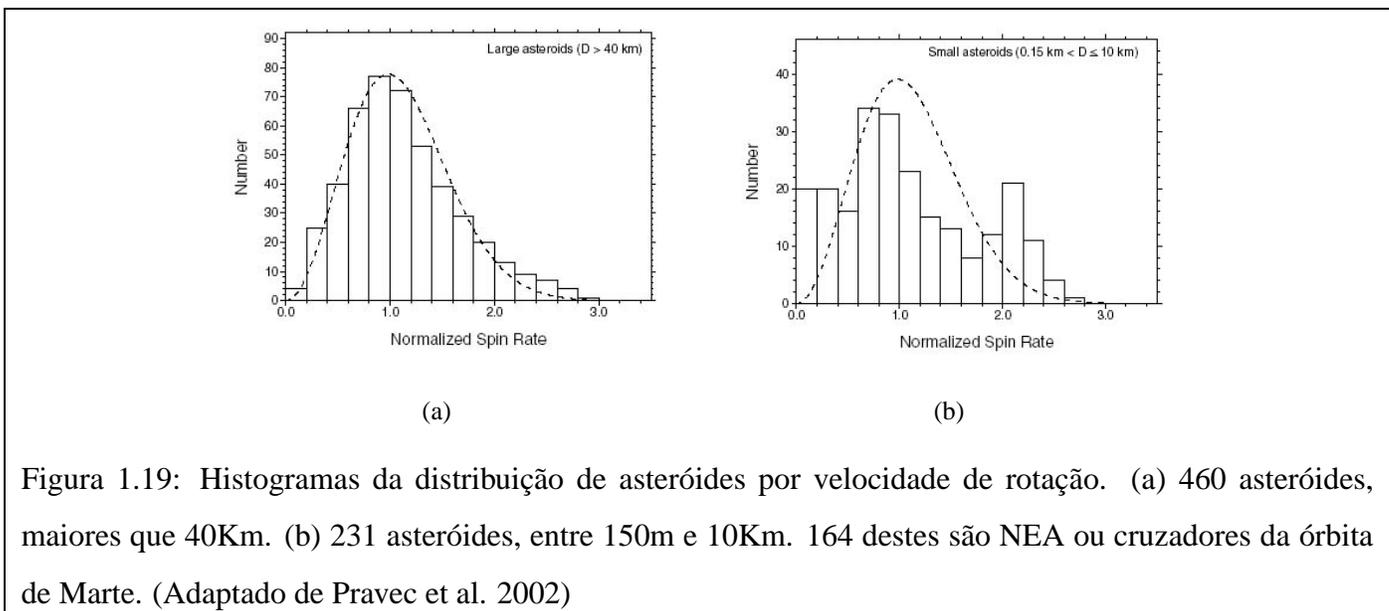


Figura 1.19: Histogramas da distribuição de asteróides por velocidade de rotação. (a) 460 asteróides, maiores que 40Km. (b) 231 asteróides, entre 150m e 10Km. 164 destes são NEA ou cruzadores da órbita de Marte. (Adaptado de Pravec et al. 2002)

1.5 O modelo semi-empírico de Paolicchi

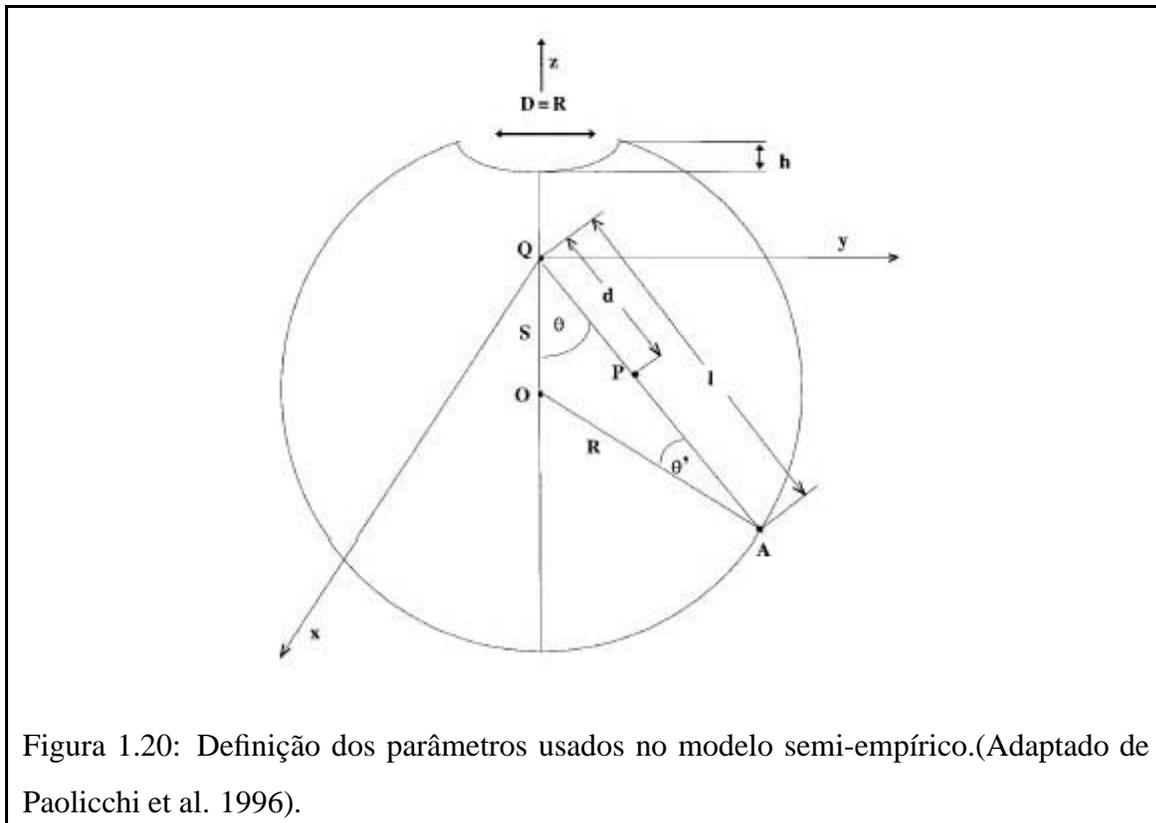
Uma abordagem distinta para modelagem de fragmentação de asteróides é o modelo semi-empírico (SEM) de Paolicchi e colaboradores (Paolicchi et al. 1989, 1996). A base para o modelo é um campo de velocidades gerado pela colisão e pela rotação inicial do alvo. A fragmentação é gerada pela não uniformidade do campo: pontos diferentes se movendo com velocidades diferentes levam ao estabelecimento de tensões que levam à separação em fragmentos. Aos fragmentos é dada a forma de um elipsóide triaxial, pela sua simplicidade e por ser esta a representação em geral utilizada para formas de asteróides e de fragmentos gerados em laboratório.

O campo de velocidades é definido como ilustrado na figura 1.20. A velocidade de cada ponto P é definida pela soma da velocidade devida à rotação do alvo (após considerar a variação provocada pela adição do momento angular da colisão) com um campo de velocidades gerado pela colisão. Este último corresponde a velocidades na direção radial a partir de um ponto Q na linha que liga o ponto de impacto ao centro do alvo (considerado sempre esférico), e que cresce com a distância ao ponto de irradiação. Utilizando os parâmetros como definidos na figura 1.20, o campo total de velocidades é

$$\vec{v}(P) := \vec{\omega}_0 \times \vec{OP} + \alpha l^{-\gamma} \left(\frac{d}{l}\right)^\delta \vec{QP}$$

α , γ e δ são, juntamente com a distância do ponto Q à superfície, os parâmetros que definem como a velocidade varia no interior do alvo, e que foram ajustados de forma a reproduzir os resultados observados em experimentos de laboratório. A própria escolha da presença de uma componente radial para o campo de velocidades foi baseada em observações dos resultados de colisões de laboratório.

O critério para a geração dos fragmentos é baseado na variação deste campo de velocidades ao longo do alvo, que gera tensões entre seus pontos, podendo levar à fratura, o que é expresso através de um critério sobre a densidade de energias dentro do corpo: onde a densidade de energia cinética excede a densidade de energia de ligação devida à gravi-



dade e à coesão ocorre a geração de um fragmento, com a forma de um elipsóide triaxial e com a velocidade correspondente à média do campo de velocidades em sua extensão. A sua rotação também é calculada a partir do campo de velocidades correspondente à região ocupada pelo fragmento. Na segunda versão do modelo o critério de fragmentação passou a verificar também a superposição dos fragmentos. Adicionalmente, o modelo gera uma cratera em torno do ponto de impacto, e toda a massa originalmente presente no interior desta região é removida. Esta escolha é feita pela maior complexidade e falta de compreensão do que ocorre na região do impacto, que não é bem observada em laboratório por consistir de uma nuvem de fragmentos muito pequenos e de velocidade muito alta.

Após ter os seus parâmetros ajustados de forma a reproduzir os experimentos de laboratório, o modelo chegou a uma concordância bastante razoável com as experiências de Giblin e colaboradores (Giblin et al. 1994, 1998) para as distribuições de tamanhos, velocidades, posições iniciais e formas dos fragmentos. O que mostra que mesmo um modelo semi-empírico simples, que não calcula diretamente a forma como a energia se

propaga e gera a fragmentação e o movimento dos fragmentos é capaz de gerar resultados gerais compatíveis com os experimentos de laboratório. A aplicação do modelo ao caso dos asteróides foi deixada para um trabalho posterior, ainda não publicado.

1.6 Estudos numéricos de fragmentação

Para contornar as limitações de tamanho para os alvos de laboratório e as restrições dos modelos analíticos, a alternativa escolhida tem sido os modelos numéricos. O desenvolvimento de modelos numéricos para a fragmentação de asteróides só se tornou expressivo nos últimos 5 anos, quando o número de modelos desenvolvidos e o seu detalhamento aumentou significativamente.

Os modelos desenvolvidos para fragmentação podem ser divididos em duas classes diferentes. A primeira consiste dos modelos que tratam basicamente de corpos reacumulados, formados por um conjunto de fragmentos que se movem de forma independente, interagindo entre si por sua gravidade e pelas suas colisões, podendo ou não incluir a possibilidade de fusão ou fissão de fragmentos. Estes modelos são basicamente modelos dinâmicos, e a sua resolução corresponde ao número de fragmentos, que são as unidades mínimas tratadas no modelo, e que em geral têm uma representação simples para a sua forma. Alguns exemplos são o modelo de Richardson e colaboradores (Richardson et al 1998, Leinhardt et al. 2000, Bottke Jr. et al. 1999) e os Elipsóides Interagentes, que utilizamos neste trabalho. Modelos desta forma normalmente são referidos como modelos de N corpos. O outro tipo de modelo desenvolvido utiliza uma resolução muito maior, partindo de um grande número de partículas que obedecem a uma equação de estado que inclui forças de coesão entre elas, de forma que cada fragmento é formado por um grande número de partículas ligadas entre si. Estes modelos comumente usam equações de estado baseadas em hidrodinâmica (mas incluem resistência a forças de cisalhamento), e permitem modelar a propagação de fissuras e formação de novos fragmentos resultantes da passagem da onda de choque pelo corpo, de forma que os fragmentos podem ter formas irregulares. Alguns modelos deste tipo são baseados em SPH (*Smoothed Parti-*

cle Hydrodynamics), como o de Benz e Asphaug (1994, 1995, 1999), e os modelos de diferenças finitas como o CTH (Holsen e Holsapple 2000) e SALE (Nolan et al. 2001). Estes modelos, comumente chamados de modelos hidrodinâmicos, são muito mais custosos computacionalmente que os de N corpos, de forma que suas aplicações ainda são ainda bastante limitadas pelo grande tempo de integração necessário. Como exemplo, a simulação a alta resolução de uma única colisão com Castalia (Asphaug e Scheeres, 1999) consumiu 5000 horas de processamento em um computador de grande porte.

Dos modelos hidrodinâmicos, será discutido aqui apenas o modelo SPH de Benz e Asphaug, considerado o mais elaborado modelo desenvolvido. Este modelo parte de uma equação de estado hidrodinâmica, conhecida como equação de Tillotson, desenvolvida para modelar impactos a altas velocidades. Adicionalmente à equação de estado, são usadas a conservação de energia e momento. O comportamento do material sob deformações é descrito por uma lei de Hooke para pequenas deformações até um limite dado por um critério conhecido como critério de von Mises, que estabelece o limite a partir do qual a deformação é plástica, com base em parâmetros do material. A partir destas equações é calculado o tensor que expressa a tensão atuante sobre cada partícula, com base no qual o seu movimento é obtido. Cada partícula tem também uma variável representando o quanto ela foi danificada, variando de 0 a 1, e que altera o seu limite de resistência, de forma proporcional a $1 - d$. Assim, $d = 0$ corresponde a uma partícula intacta, e $d = 1$ a uma completamente danificada, de forma que uma fratura é formada no local (ou uma já existente se propaga). Esta variável é útil para identificar os efeitos da colisão, como mostrado na figura 1.21. A maior crítica aos modelos SPH está em modelar o material completamente danificado como fluido (pelo uso das equações hidrodinâmicas), e não como um conjunto de partículas desagregadas (como uma pilha de areia).

Cada colisão se inicia pela aplicação desta modelagem hidrodinâmica, até que a fragmentação tenha terminado. A partir deste momento, os fragmentos são identificados, procurando pelas partículas adjacentes que ainda estejam ligadas, e os fragmentos resultantes têm seu movimento calculado por um modelo de N corpos. Esta mudança deve-se ao fato de as fragmentações e os outros efeitos associados (deformação, danificação) ocorrerem pre-

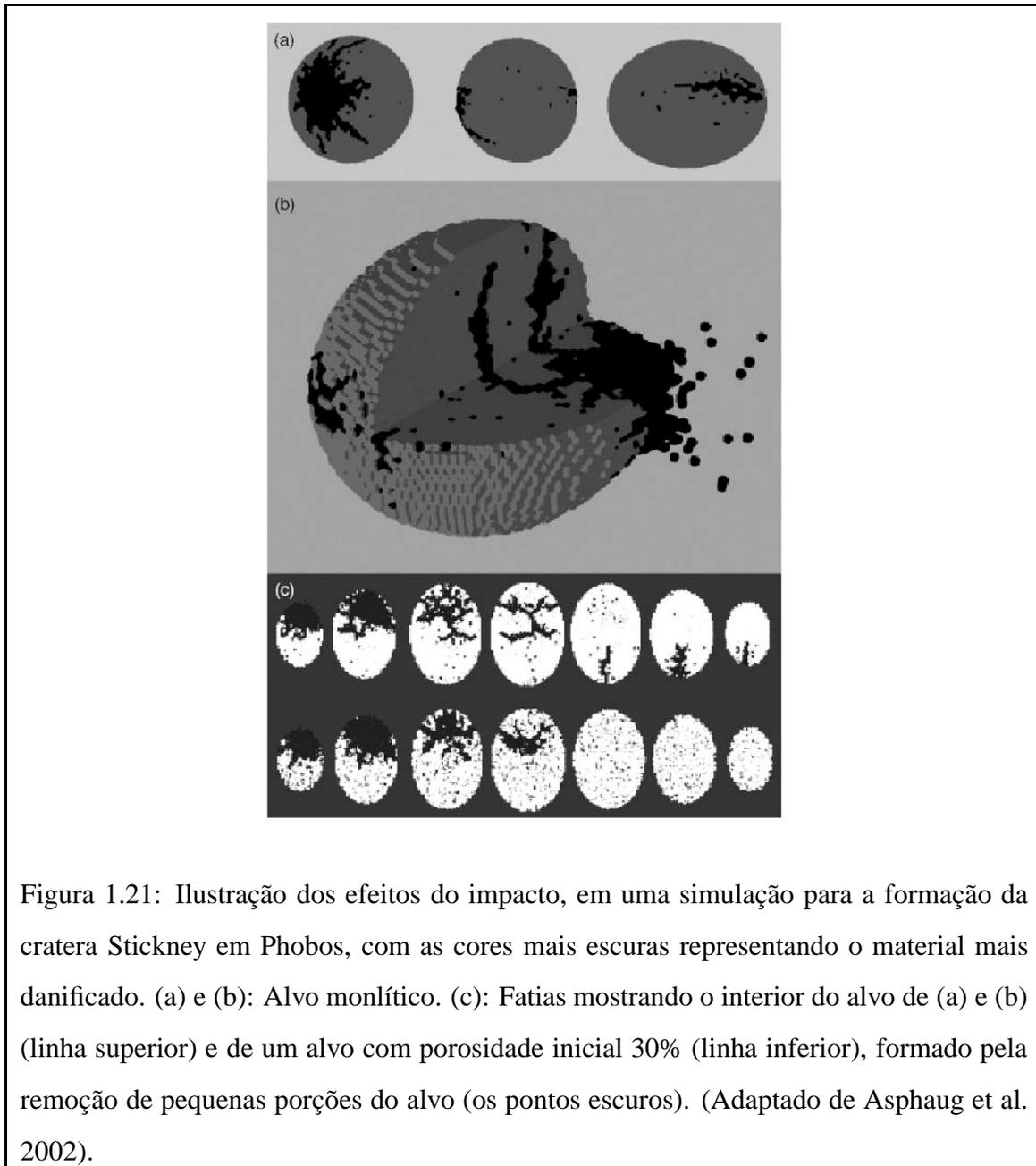


Figura 1.21: Ilustração dos efeitos do impacto, em uma simulação para a formação da cratera Stickney em Phobos, com as cores mais escuras representando o material mais danificado. (a) e (b): Alvo monolítico. (c): Fatias mostrando o interior do alvo de (a) e (b) (linha superior) e de um alvo com porosidade inicial 30% (linha inferior), formado pela remoção de pequenas porções do alvo (os pontos escuros). (Adaptado de Asphaug et al. 2002).

dominantemente no momento em que a onda de choque passa pelo corpo, e o tempo de computação pode então ser bastante reduzido ao utilizar posteriormente um modelo de N corpos, que dispensa o cálculo da tensão sobre cada partícula, e usa uma resolução muito menor (apenas os fragmentos formados, e não cada partícula que o forma). Nos trabalhos mais recentes, o modelo de N corpos usado foi o de Richardson e colaboradores, discutido mais adiante.

O modelo ainda inclui uma distribuição prévia de fissuras no alvo, modelada de forma explícita, que é definida de forma a ser equivalente estatisticamente ao modelo de Grady-Kipp. O modelo de Grady-Kipp é um modelo estatístico para a distribuição e propagação das falhas ao longo do corpo, partindo de uma densidade numérica dada por uma distribuição de Weibull no volume do alvo. Este modelo apenas leva à distribuição estatística das falhas, não indicando explicitamente onde elas se localizam; no código SPH foi usada uma distribuição explícita, necessária para identificar os limites de cada fragmento no corpo.

Inicialmente foram realizadas simulações de alvos de laboratório, que indicaram um funcionamento satisfatório do modelo neste regime. Nas suas primeiras aplicações para fragmentação de asteróides monolíticos, Benz e Asphaug (1999) encontraram que a transição entre os regimes de coesão e gravitacional, correspondendo ao mínimo de resistência a impactos, ocorre a tamanhos em torno de centenas de metros. A partir deste tamanho, a gravidade faz com que a sua resistência aumente e com que haja uma diferença significativa entre a energia para fragmentar e para dispersar os fragmentos dos asteróides. Neste trabalho foi observada também uma distinta mudança de estrutura a um diâmetro de 1Km: em alvos menores que este valor o maior fragmento formado na colisão era monolítico, enquanto para corpos maiores o maior fragmento era um corpo reacumulado formado por fragmentos pequenos. Esta mudança de comportamento indica que corpos reacumulados seriam comuns a partir de 1Km de diâmetro, e que esta mudança de regime estrutural poderia ser responsável pela mudança de regime colisional observada por Harris a 150m de diâmetro.

Este modelo foi também aplicado a eventos de formação de famílias. Em Michel et al. (2002) foram modeladas colisões que teriam originado as famílias de Eunomia, Flora

e Koronis, três das maiores e mais bem definidas. O principal resultado observado foi que os maiores membros das famílias formadas eram corpos reacumulados, o que ajuda a resolver o antigo problema de os eventos que geram velocidades de ejeção suficientemente altas geram fragmentos muito pequenos se comparados aos membros das famílias. Por este modelo, a reacumulação subsequente faz com que os corpos resultantes apresentem tamanhos compatíveis aos observados. Deve ser notado, no entanto, que este estudo partiu de alvos esféricos monolíticos, embora seja esperado que corpos deste tamanho sejam reacumulados. A rotação dos membros das famílias não foi analisada neste trabalho.

Outra aplicação para este modelo foi a formação de grandes crateras, de forma a simular as observadas em Phobos, Ida e Mathilde. Como ilustrado na figura 1.6, foram utilizados os modelos conhecidos para as formas destes corpos, sem aproximá-los por formas regulares. Nestas simulações foram usados alvos com baixa e alta porosidade, de forma a verificar qual resultado se adequava melhor aos corpos observados. Para Phobos e Ida os modelos e as observações de sua superfície indicam que estes precisam apresentar boa transmissão de energia em seu interior, mas apenas para compressão, de forma que não é necessário que estes sejam resistentes à tração. Estes resultados indicariam que sua baixa densidade se deve à microporosidade. Para o caso de Mathilde não foi encontrada uma modelagem razoável, e diferentes autores encontraram resultados diferentes, embora pareça ser comum a conclusão de que este corpo seja reacumulado, com transmissão pouco eficiente das ondas de choque em seu interior. As maiores particularidades observadas em Mathilde são sua baixa densidade ($1.3g/cm^3$), o mais longo período de rotação conhecido (17.4 dias), muitas crateras muito grandes (4 com diâmetro maior que o raio médio do asteroide, que tem $66 \times 48 \times 46$ Km), falta de sinais de deposição de material ejetado das crateras e o estado de preservação das crateras, indicando que as mais recentes não danificaram as anteriores.

O modelo de N corpos de Richardson e colaboradores foi usado para simular colisões e efeitos de maré sobre corpos reacumulados. Cada corpo é formado por um grande número (de centenas a alguns milhares) de fragmentos esféricos. Os fragmentos interagem por sua gravidade mútua, e as colisões são modeladas com perda de energia, através

do uso de coeficientes de restituição normal (ϵ_n) e tangencial (ϵ_t). Estes correspondem a quanto de cada componente da velocidade é preservado após a colisão (a velocidade tangencial mantém sua direção, com módulo alterado por um fator ϵ_t , e a componente normal tem sua direção invertida e módulo alterado de um fator ϵ_n). Estes coeficientes de restituição variam de 0 (colisão inelástica) a 1 (colisão elástica); foram utilizados valores fixos para a componente tangencial e para a normal um valor dependente da velocidade (1 para baixas velocidades, e dois valores menores para faixas de velocidades maiores). A inclusão de dissipação é necessária para que seja possível que os corpos atinjam um estado de equilíbrio. Em sistemas conservativos os fragmentos não chegam a se acomodar, permanecendo oscilando e colidindo entre si indefinidamente.

Ainda assim, os corpos não atingem acomodação completa, pelo uso de colisões elásticas a baixas velocidades. Esta escolha foi feita para reduzir os tempos de integração necessários, pois seria impraticável estender as integrações por tempo suficiente para se atingir acomodação completa. É considerado que foi atingido um estado estacionário quando as velocidades relativas dos fragmentos remanescentes são baixas, e não há mais mudanças significativas na forma do corpo. Para verificar se este critério era razoável, foram simuladas pilhas de areia, e os ângulos de repouso encontrados foram satisfatórios. A montagem dos alvos parte de uma distribuição regular dos fragmentos, que recebem pequenas velocidades aleatórias. Este sistema é então integrado até que os fragmentos se acomodem, e o alvo resultante recebe uma rotação (apenas para o movimento coletivo; não há rotação dos fragmentos) para ser usado nas simulações.

Nas simulações realizadas os corpos reacumulados foram submetidos a colisões (a baixa velocidade, no regime de acreção) com outros corpos reacumulados e a forças de maré de um encontro próximo com um planeta. Alguns corpos resultantes estão ilustrados na figura 1.22. De uma forma geral, em ambos os casos foi observado que a rotação dos corpos é um parâmetro importante para determinar os resultados, tanto em relação à rotação final, quanto para a forma e a quantidade de massa retida ao final das simulações.

Para os impactos (com corpos iniciais esféricos), foi observado que as formas mais assimétricas resultam de colisões com corpos de rotações em sentidos opostos. As for-

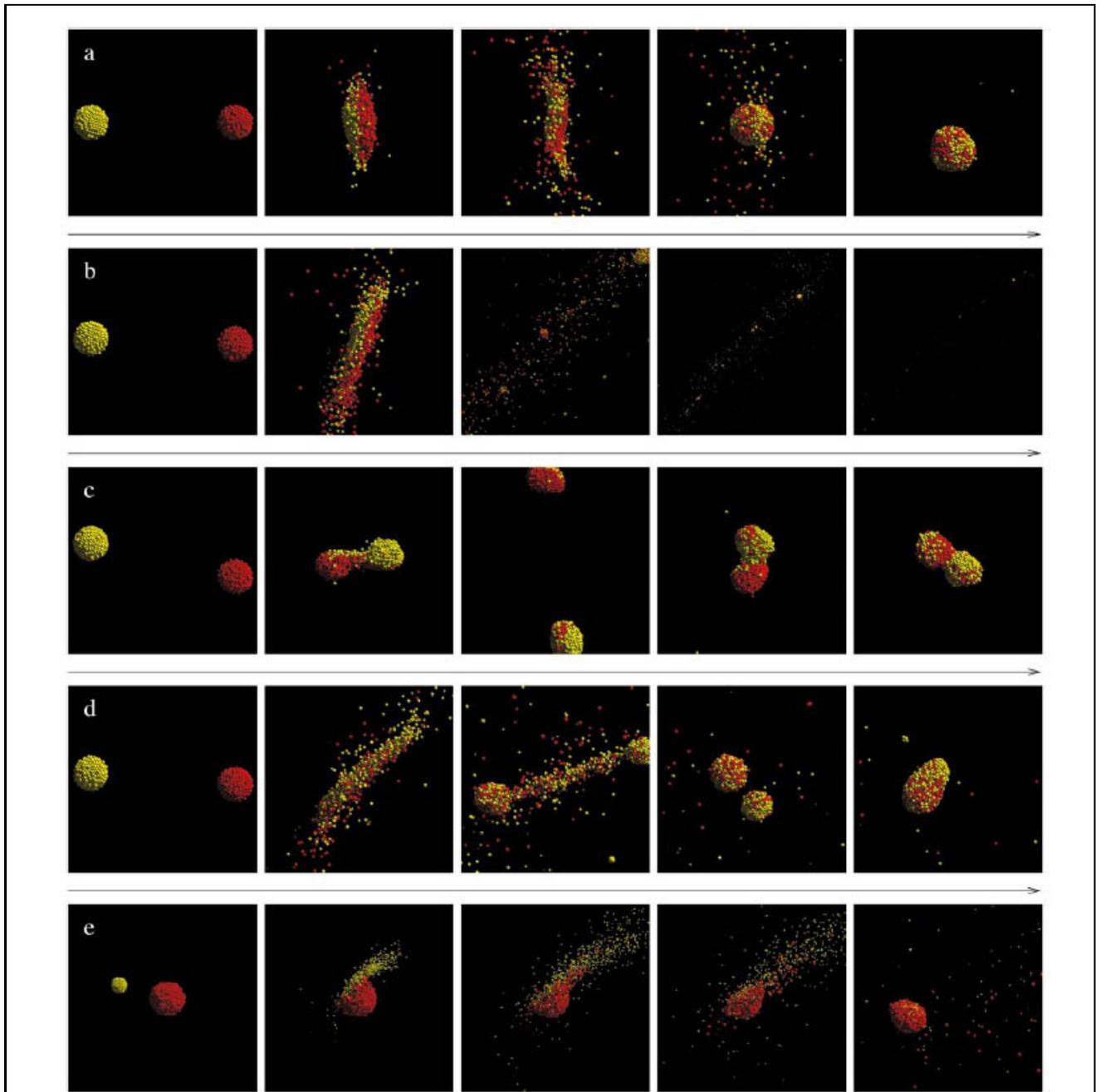


Figura 1.22: Algumas imagens representativas dos corpos resultantes de colisões de corpos reacumulados, simuladas com o modelo de N corpos de Richardson. Cada seqüência horizontal corresponde a diferentes momentos de uma mesma colisão. As diferentes cores foram usadas para diferenciar os fragmentos inicialmente pertencentes a cada um dos corpos. (Adaptado de Leinhardt et al. 2000).

mas mais alongadas e com rotações mais rápidas foram resultado tanto da maior rotação inicial, como de um maior ângulo de impacto. Os resultados variam de corpos aproximadamente esféricos a elipsóides, binários e corpos alongados com dois lobos. Satélites grandes foram observados de forma relativamente rara, com a predominância de escape ou reacumulação dos fragmentos. Foi ainda observado nas colisões que há uma maior importância dos coeficientes de restituição do que dos efeitos de maré dos corpos.

Para os encontros próximos com um planeta esférico, foi obtida uma grande variedade de formas e velocidades de rotação, de forma semelhante ao previsto no modelo de Scheeres et al. (2000, 2002). Os resultados, com variados graus de disrupção, alongamento e variação na rotação são bastante dependentes da geometria do encontro. Em particular, foi observado que este modelo reproduz tanto eventos de disrupção do tipo Shoemaker-Levy 9, quanto formas e rotação semelhantes às de 1620 Geographos e 433 Eros.

1.7 A energia para fragmentar um asteróide

Como discutido anteriormente, tanto os estudos de laboratório como os numéricos deram grande atenção à obtenção de leis de escalonamento que permitam calcular a energia necessária para a fragmentação catastrófica de um asteróide. Esta é uma informação fundamental para os modelos de evolução colisional e rotacional e para o estudo da formação de famílias e da geração de fragmentos que podem vir a se tornar meteoritos. Uma revisão recente dos resultados já obtidos é a de Holsapple e colaboradores (2002).

Há dois fenômenos distintos para os quais se procura as leis de escalonamento para a geração de fragmentos e as velocidades de ejeção destes: a craterização e a fragmentação. Em ambos os casos há dois regimes distintos para o processo, o regime dominado pela resistência do material do alvo e o regime dominado pela gravidade. Neste ponto reside a principal diferença entre o tipo de dados existentes para os experimentos realizados: para craterização há dados de experiências realizadas com energias suficientes para que se atinja o regime gravitacional, o que não ocorre para o caso de fragmentação. A possibilidade de realizar experimentos de craterização no regime gravitacional deve-se prin-

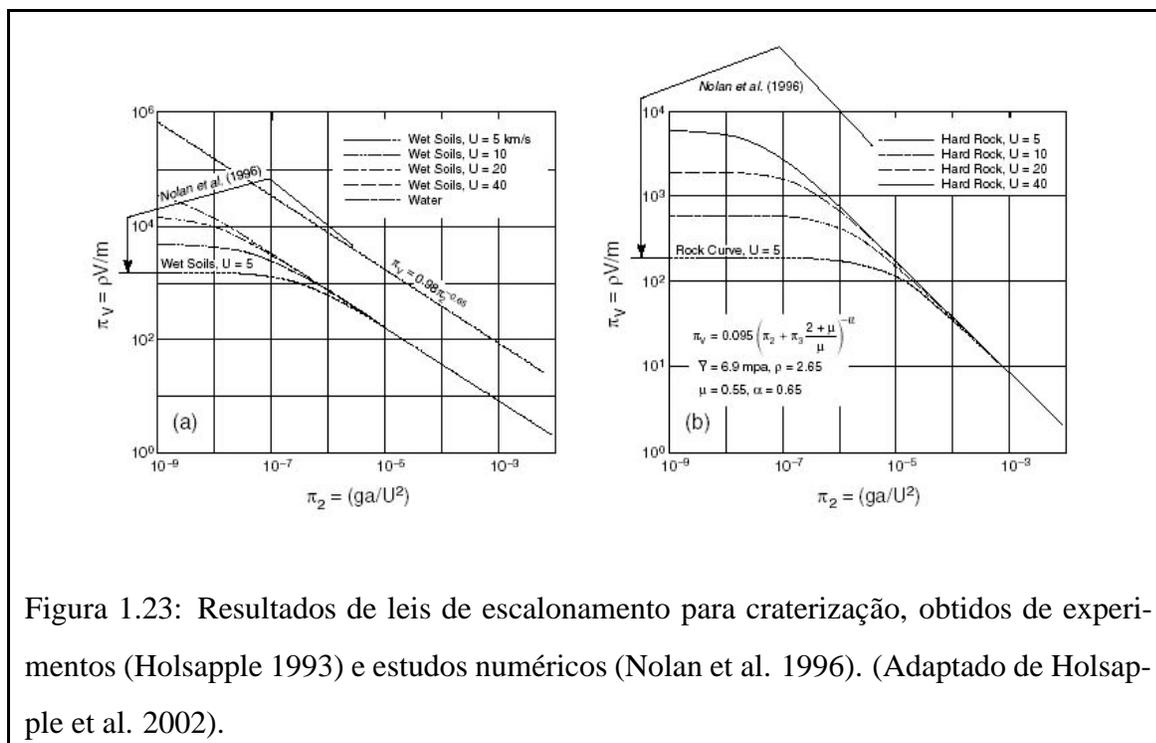


Figura 1.23: Resultados de leis de escalonamento para craterização, obtidos de experimentos (Holsapple 1993) e estudos numéricos (Nolan et al. 1996). (Adaptado de Holsapple et al. 2002).

principalmente ao fato deste ocorrer a energias muito menores que para fragmentação, uma vez que por definição a craterização envolve a geração de fragmentos muito menores que o alvo. Experimentos de craterização são também favorecidos por ser possível estudar a formação de crateras em alvos semi-infinitos (podendo ser a própria superfície da Terra) e atingir energias muito mais elevadas através de explosões (embora ainda muitas ordens de grandeza menores que as de colisões de asteróides). As maiores energias atingidas em explosões para craterização foram de alguns Mt de TNT (1 megaton de TNT equivale a $4.2 \times 10^{12} J$), em explosões atômicas, embora deva ser notado que no caso de experimentos militares - principalmente os experimentos nucleares - seja comum a restrição ao acesso aos seus dados.

A figura 1.23 mostra alguns resultados de experiências de craterização, por impacto e por explosões. Um dos resultados obtidos por estas experiências foi a observação da possibilidade de uma equivalência nos resultados de algumas experiências com explosivos e com impactos, conforme descrito em Holsapple (1980) e Ryan (1992).

Um impacto direciona mais de sua energia e momento para dentro que uma explosão,

mas vários experimentos e modelos numéricos mostraram que quando o explosivo está inicialmente enterrado a uma profundidade igual ao diâmetro da cratera gerada os resultados se assemelham para explosões e impactos ocorrendo com as mesmas densidade de energia e velocidade (do projétil ou velocidade de propagação da explosão). Esta equivalência foi usada por Giblin e coautores (1994, 1998) para realizar experimentos destinados a simular impactos com o uso de explosivos. O uso de explosivos permite atingir energias mais altas (e também alvos maiores), que não seriam possíveis de ser atingidas para projéteis de alta velocidade ($> 1\text{Km/s}$), devido às limitações das armas utilizadas para dispará-los. Foram alcançadas crateras com diâmetros de até 400m no solo, chegando à faixa do quilômetro em recifes de coral.

De uma forma geral, os resultados obtidos indicam que no regime de coesão do material o volume da cratera por energia de impacto depende apenas da resistência do material, sem efeitos de dependência do tamanho ou velocidade. Já no regime gravitacional, o volume da cratera deixa de depender da resistência do material e passa a depender da gravidade e da energia do evento, com o volume por energia diminuindo com o aumento da energia. Como é possível realizar experiências nos dois regimes é conhecido o tamanho de transição, que para a gravidade terrestre ocorre a diâmetros de crateras em torno de 30m para rochas sólidas e em torno de 10m para solos secos (energias de 1kt de TNT e algumas toneladas de TNT, respectivamente) (Holsapple, 1993).

Estes resultados foram obtidos para materiais de baixa porosidade. Experimentos recentes têm mostrado que em materiais de alta porosidade a formação de crateras ocorre de forma bastante distinta; a maior parte do volume da cratera se deve apenas à compactação do material que sofreu o impacto, diminuindo a sua porosidade, enquanto em materiais pouco porosos o principal processo atuante é a ejeção a altas velocidades do material da região do impacto. Em impactos de alta velocidade a 500G em um alvo de 50% de porosidade que apenas 10% da massa da cratera foi ejetada, sendo o restante formado apenas por compactação. As velocidades de ejeção foram também consideravelmente menores que em alvos de baixa porosidade. Como discutido anteriormente, os asteróides parecem ter porosidade bastante elevada, de forma que seus efeitos precisam ser investigados de

forma mais detalhada.

Em parte pela sua maior dificuldade de realização e pelo maior número de variáveis envolvidas, o uso de alvos porosos é recente e ainda não há trabalhos que cheguem a obter uma lei de escalonamento válida para estes corpos, e nem determinações quantitativas de como a formação de crateras varia com a porosidade. Holsen e Holsapple (2000) aplicaram seu modelo hidrodinâmico (CTH) a colisões com alvos porosos, e tiveram dificuldade para reproduzir os resultados de laboratório; seus resultados para a compactação eram bastante sensíveis a parâmetros do material não conhecidos previamente.

Para colisões levando a fragmentação catastrófica, cuja importância parece ser significativa para os asteróides, torna-se mais problemático obter leis de escalonamento confiáveis. Por serem necessárias energias específicas muito maiores que para a craterização, não é possível realizar experimentos com alvos grandes o suficiente para que se encontrem no regime de dominância da gravidade. Se por um lado é certo que qualquer experimento de laboratório está muito distante do regime de gravidade, há muito debate sobre qual seria o tamanho da faixa de transição. Estimativas atuais obtidas de formas diferentes apontam para valores menores que os clássicos (de 30 a 150Km), mas ainda variam significativamente, indo de centenas de metros a dezenas de quilômetros. Em muitos casos esta variação é encontrada em um mesmo trabalho, devendo-se apenas a escolhas diferentes de parâmetros usados, cujos valores mais adequados são desconhecidos.

O principal parâmetro que se procura ajustar por leis de escalonamento, e que é o que permitiria identificar a faixa de transição do regime de coesão para o regime de gravidade é a energia específica mínima para a fragmentação catastrófica. Esta definição, apesar de comum, é adotada de maneira não uniforme: alguns autores trabalham com a energia necessária apenas para fragmentar o alvo, de forma que o maior fragmento tenha massa igual à metade da massa do alvo; outros utilizam a energia para a dispersão dos fragmentos de tal forma que após a reacumulação devida à gravidade o maior fragmento tenha metade da massa do alvo. Esta energia é maior que a necessária apenas para a fragmentação catastrófica, uma vez que os fragmentos formados têm que receber energia suficiente para se dispersar - a diferença não é apenas a energia cinética dos fragmentos,

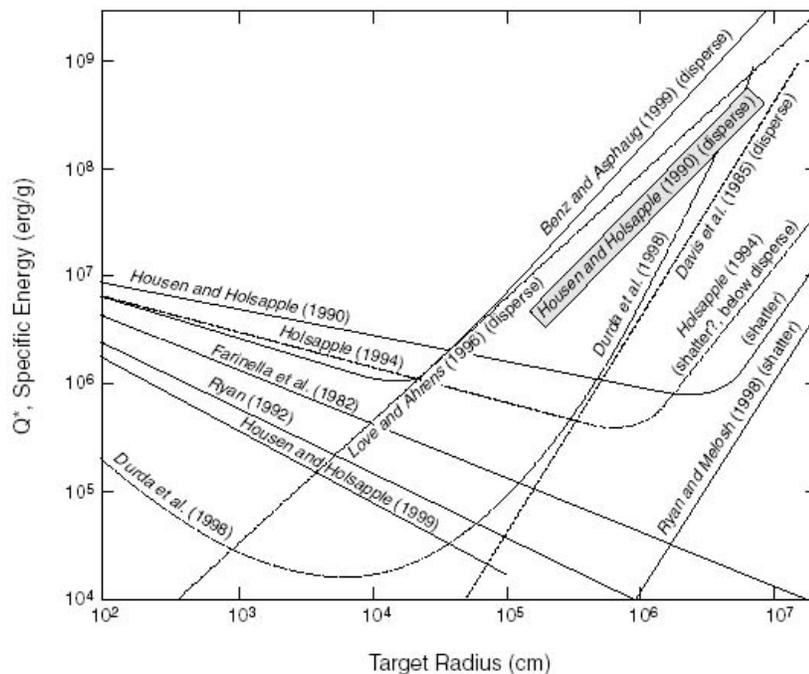


Figura 1.24: Diferentes leis de escalonamento, provenientes de várias abordagens diferentes. É importante notar a diferença entre as leis para fragmentação e dispersão catastrófica, no regime gravitacional. (Adaptado de Holsapple et al. 2002).

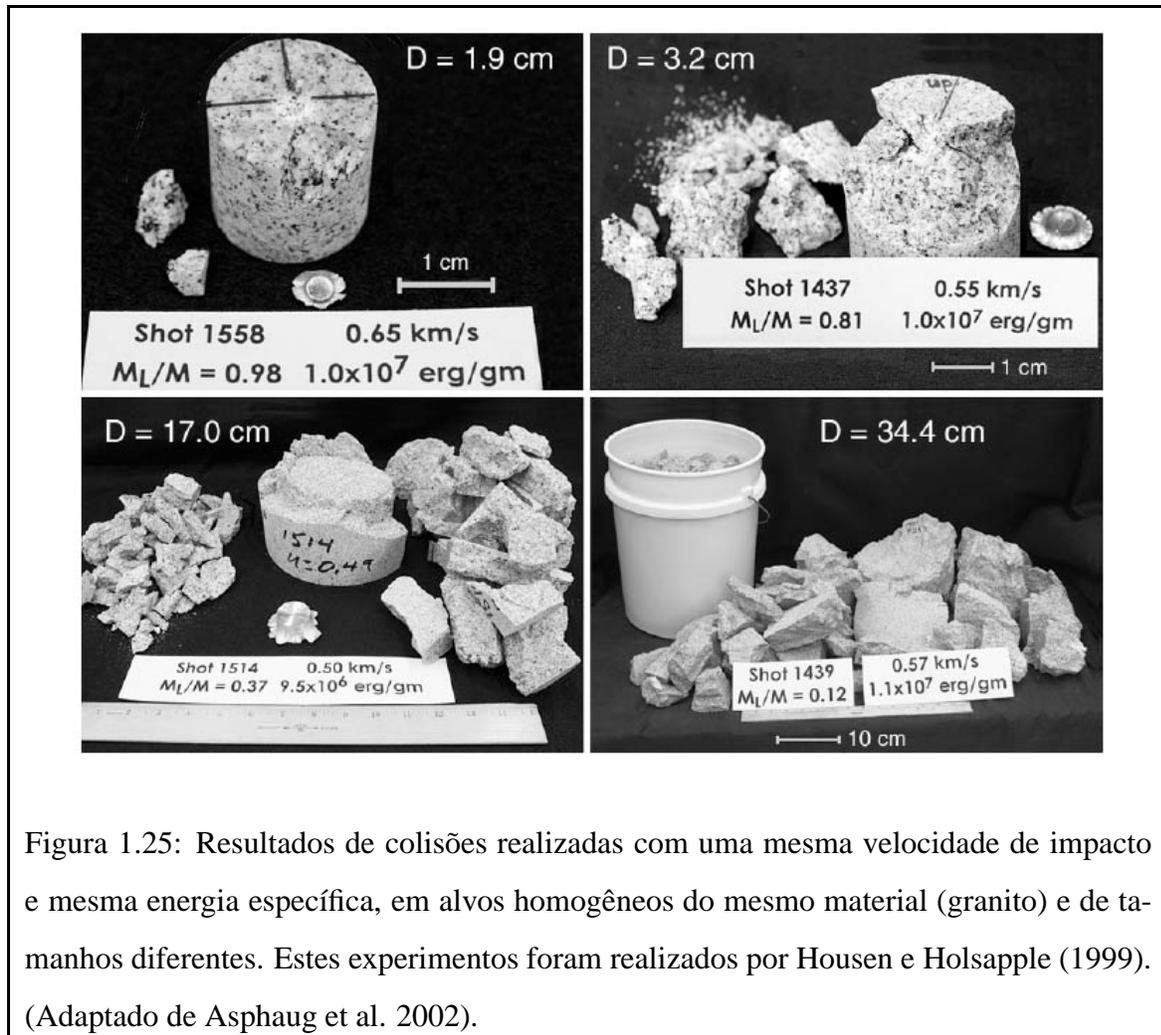
pois deve ser considerada a baixa eficiência para transferir a energia do impacto para os fragmentos. Esta diferença é bastante clara na figura 1.24, onde estão indicadas as curvas correspondentes a limites de fragmentação e dispersão. Há uma concordância geral sobre a forma que estas funções devem apresentar: espera-se uma energia específica decrescente para o regime de coesão, e crescente para o regime gravitacional. O que é discutido é a inclinação e a altura da curva nos dois regimes, e onde ocorre a transição.

Tradicionalmente, a distinção entre resistência a impactos e resistência estática à tração não era reconhecida. Esta suposição de uma resistência constante com o tamanho e a velocidade do esforço levava à conclusão de que o regime gravitacional deveria ocorrer quando a densidade de energia gravitacional igualasse a resistência (estática) do material, o que correspondia a um valor em torno de 100 km para os asteróides. Era negligenciada

ainda a diferença entre a energia necessária para fragmentar e para dispersar um corpo. Desta forma, se acreditava que o resultado de uma colisão seria a ejeção dos fragmentos, sendo a gravidade importante (capaz de levar à formação de corpos reacumulados) apenas para os maiores asteróides, acima de 100Km.

No entanto, mesmo materiais homogêneos devem se tornar menos resistentes com o aumento de seu tamanho, por apresentarem mais fissuras internas. Segundo modelos padrão para a ocorrência de falhas em um corpo homogêneo (como o de Grady-Kipp), as falhas se distribuem em um corpo com uma densidade menor para as que possuem menores energias de ativação. Desta forma, haverá um grande número de falhas com alta energia de ativação (mais fortes), e a de mais baixa energia de ativação esperada de ser encontrada é a que tem uma densidade de 1 falha por volume do corpo. Se um corpo tem apenas a resistência de sua falha mais fraca, quanto maior o seu tamanho mais fraco ele será, uma vez que será esperado que ele contenha falhas com menor energia de ativação.

Outro fator a ser considerado é a dependência da resistência com a velocidade do esforço aplicado. Os limites de resistência usados inicialmente eram os valores estáticos (esforços aplicados de forma lenta). O modelo para a propagação de falhas desenvolvido por Grady e Kipp (1980) parte de uma distribuição de falhas de Weibull para obter a sua propagação durante a fragmentação, de forma a obter os efeitos dinâmicos. Neste modelo, a tensão no corpo aumenta até que as falhas mais fracas sejam ativadas. As falhas ativadas crescem à metade da velocidade do som no material, aliviando as tensões na região onde se formam. Caso a taxa de crescimento das falhas não seja suficiente para aliviar as tensões sendo acumuladas, o nível mais alto de tensão ativa mais falhas (de maior energia de ativação) até que um equilíbrio seja atingido entre a taxa de formação de falhas (e alívio resultante da tensão) e a taxa de acúmulo de tensão (provocada pelo esforço aplicado ao corpo). Desta forma, em esforços com altas taxas de tensionamento são ativadas mais falhas, levando à formação de fragmentos menores que para esforços lentos. O resultado é que em colisões a velocidades constantes os corpos maiores serão mais resistentes, pois as taxas de tensionamento serão menores. Para impactos de laboratório esta taxa é em torno de $10^6 s^{-1}$, enquanto estimativas para asteróides são de 10^{-3} a $10^{-5} s^{-1}$. Adicional-



mente, é previsto que a taxas de tensionamento mais baixas as velocidades de ejeção dos fragmentos diminuem. A figura 1.25 ilustra esta variação na resistência com o tamanho.

Estes efeitos de tamanho e velocidade contribuem para dificultar a determinação da região de transição para o regime gravitacional. Resultados atuais de modelos numéricos considerando estes dois fenômenos variam entre 100m e 10Km. No regime gravitacional, a resistência passa a aumentar com o tamanho, devido ao aumento da energia gravitacional. Não é trivial, no entanto, determinar a forma como ocorre este aumento. No regime gravitacional a diferença entre fragmentação e dispersão do alvo torna-se importante, e diferentes modelagens levaram a diferentes estimativas de como estas energias variam com o tamanho, o que é basicamente um resultado de diferentes estimativas para

as velocidades de ejeção dos fragmentos.

Deve ser mencionado ainda que apesar da predominância do uso da energia específica para medir a intensidade do impacto, alguns trabalhos baseados em modelos de impactos pontuais argumentam que alguma outra combinação da massa e velocidade do projétil deveria ser usada, intermediária entre o momento e a energia cinética (uma potência para a velocidade entre 1 e 2). Como mencionado anteriormente, este tipo de modelagem se aplica melhor a colisões de alta velocidade, nas quais o menor tamanho do projétil torna o evento mais próximo da aproximação pontual.

Outro fator adicional a ser considerado é que estas leis para a energia de fragmentação e ruptura foram obtidas para corpos monolíticos. É importante lembrar que em corpos porosos ou reacumulados o efeito de variar a taxa de tensionamento é o inverso do efeito para corpos monolíticos: corpos reacumulados podem ser facilmente fragmentados por esforços lentos pela sua falta de coesão, mas a sua grande dissipação interna de energia e baixa eficiência para transmitir a onda de choque fazem com que sejam altamente resistentes a impactos. E a constatação de que a gravidade é importante mesmo para corpos tão pequenos como 1Km e a diferença entre a energia para fragmentar e para dispersar um corpo implicam na presença comum de corpos reacumulados.

Tendo em vista as novas informações e pontos de vista sobre os antigos problemas ainda a serem resolvidos para compreender a evolução asteróides, desenvolvemos um modelo para simular a sua fragmentação colisional e estudar os efeitos mútuos dos processos de evolução rotacional e colisional de asteróides. Este é um modelo do tipo N corpos, que tem como principal diferenciação em relação aos outros existentes a inclusão da rotação de cada fragmento. O seu desenvolvimento e os primeiros resultados obtidos são descritos nos capítulos seguintes.

Capítulo 2

Elipsóides Interagentes

Neste trabalho utilizamos o modelo de Elipsóides Interagentes para analisar a evolução rotacional de corpos reacumulados submetidos a colisões. Este modelo tem sido desenvolvido pelo grupo nos últimos anos, e uma descrição do desenvolvimento da parte mais básica do modelo constituiu um projeto de final de curso de graduação (Penteado 2002). No trabalho anterior foi realizado o desenvolvimento e os primeiros testes deste modelo. Aqui apresentamos algumas das modificações realizadas e os resultados de alguns testes adicionais. O trabalho de desenvolvimento do modelo realizado anteriormente será apenas revisto aqui, com uma discussão mais detalhada disponível no trabalho anterior. Há também um artigo (reproduzido no final deste texto), submetido para publicação na revista *Icarus* (Roig et al. 2003), que contém a descrição do modelo e os resultados das primeiras simulações de fragmentação colisional, voltadas ao estudo da formação de famílias de asteróides.

O objetivo deste trabalho e dos outros relacionados ao desenvolvimento deste modelo é construir um modelo que permita obter os resultados de colisões de asteróides, tomando como base o comportamento dos fragmentos que compõem os corpos. O desenvolvimento parte do modelo mais simples que permita simular fragmentações, com a inclusão gradual de novos processos físicos de forma a avaliar os efeitos de cada processo sobre o resultado da colisão, identificando os processos dominantes e quais os seus efeitos. A sua principal diferenciação para outros modelos de N corpos existentes é a inclusão da rotação de cada

fragmento, e a atenção maior dada à interação entre a rotação e as colisões.

Os asteróides são modelados como corpos reacumulados, formados por um conjunto de fragmentos independentes que interagem entre si. Espera-se que grande parte dos corpos do Cinturão tenham características de corpos reacumulados, de forma que este modelo pode ser aplicado de forma imediata ao estudo de asteróides sem que esta suposição para sua estrutura implique em uma limitação séria. Cada fragmento é modelado com a forma de um elipsóide triaxial, e tem seu movimento determinado apenas pelas suas interações com os outros fragmentos. O movimento de cada fragmento é calculado de forma completa, incluindo a rotação e translação em três dimensões.

O uso de corpos reacumulados também se deve ao fato de esta ser uma forma simples de tratar um corpo que pode se fragmentar, uma vez que a fragmentação pode ser tratada sem que seja necessário modelar a propagação de fraturas e as forças de coesão do material. Como discutido anteriormente, a modelagem de criação de novos fragmentos do tamanho de asteróides é ainda muito incerta, e tema de muitos trabalhos e discussões atuais para tentar determinar como os modelos usados para corpos pequenos (que de forma geral reproduzem bem o comportamento do material) podem ser utilizados em corpos grandes. Independentemente deste problema, a modelagem de um corpo previamente fragmentado faz parte de qualquer modelo que inclua formação de novos fragmentos, uma vez que após formados os fragmentos é necessário calcular o movimento de cada um. Desta forma, este modelo pode ser usado como base para o desenvolvimento futuro de um modelo que considere também a coesão e a formação de novos fragmentos. Adicionalmente, estamos interessados em abordar o problema de fragmentação de asteróides de forma gradual, para poder compreender qual a importância de cada processo para o resultado final.

Alguns experimentos de laboratório e alguns estudos hidrodinâmicos de corpos reacumulados mostram que a formação de novos fragmentos (a altas velocidades de impacto) ocorre quase que exclusivamente no fragmento do corpo original que recebeu o impacto, pois a onda de choque não consegue se propagar para fora dele. Este fragmento é fortemente danificado ou mesmo pulverizado, enquanto os outros recebem um impacto mas

são pouco danificados. Se estes resultados forem representativos, a modelagem de um corpo reacumulado sem geração de novos fragmentos constitui uma modelagem bastante próxima do resultado obtido com fragmentação, desde que seja incluída uma forte perda de energia e momento para contabilizar o que é perdido na pulverização do fragmento que recebeu o impacto. A diferença no resultado estaria predominantemente na sobrevivência do fragmento que sofreu o impacto, enquanto que os outros seriam bastante representativos do resultado real.

Cada fragmento tem sua densidade representada por uma gaussiana tridimensional centrada na posição de seu centro de massa, com seus eixos nas direções dos eixos principais do elipsóide que representa a forma do fragmento. O elipsóide triaxial corresponde, portanto, a uma superfície de densidade constante. Esta representação permite ao mesmo tempo uma forma razoável de se trabalhar com uma densidade constante (que seria uma função degrau) ao escolher uma gaussiana estreita, como permite que se modele uma densidade variável em direção ao centro, o que poderia ser utilizado para representar um corpo diferenciado, por exemplo. Adicionalmente, o uso de funções descontínuas com uma função degrau traz inconvenientes para o trabalho analítico e numérico, enquanto uma gaussiana é uma função bastante conveniente para ser trabalhada.

A representação da densidade é utilizada na forma

$$\rho_i(\vec{r}) := \rho_{i_0} e^{-C(\vec{r}-\vec{r}_i)^T A(t)^T E A(t)(\vec{r}-\vec{r}_i)} \quad (2.1)$$

onde ρ_{i_0} é a densidade no centro do elipsóide i , C é uma constante adimensional que determina o quão concentrada é a distribuição da massa, \vec{r}_i é a posição do seu centro, E é a matriz diagonal formada pelos inversos dos quadrados dos semi-eixos principais e $A(t)$ é a matriz de rotação que leva de um sistema de referência inercial a um sistema que acompanha a rotação do elipsóide.

A escolha de uma forma elipsoidal se deve à sua simplicidade, e pelo fato de esta ser uma representação comum para a forma de asteróides e de fragmentos gerados em laboratório ou em modelos numéricos. Representações mais elaboradas trariam uma grande complexidade adicional e muitos parâmetros livres ao modelo, o que não corresponde à

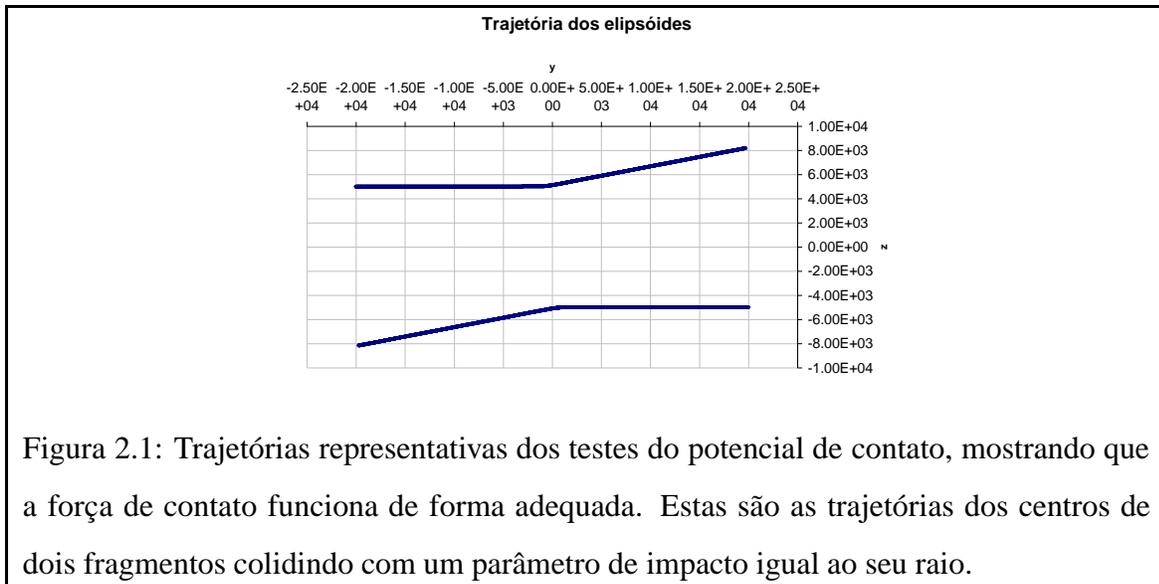
nossa proposta de modelar a física fundamental atuante nas colisões, bem como levariam à falta do conhecimento de muitos parâmetros de entrada e à falta de dados a serem comparados com os resultados do modelo. Ainda, a forma de elipsóides triaxiais é a figura de equilíbrio hidrostático para corpos em rotação (para rotações muito rápidas, o elipsóide de revolução deixa de ser uma figura de equilíbrio estável, passando a ser um elipsóide triaxial).

As forças modeladas diretamente atuando sobre cada fragmento foram a sua atração gravitacional e uma força de contato, que faz com que eles resistam à sua sobreposição, e são ambas forças que atuam aos pares. A força gravitacional foi modelada simplesmente como a resultante do termo de monopolo do potencial:

$$V_{G_{i,j}} = -G \frac{M_i M_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.2)$$

Foi escolhida apenas esta representação para o potencial gravitacional por ser este o termo dominante para o potencial de um corpo diferindo pouco de uma esfera, como é o caso em geral para os asteróides. Os termos adicionais são muito menores que o monopolo, de forma que seriam importantes apenas caso se estivesse estudando movimentos ocorrendo em escala mais lenta, e sem que haja contato entre os fragmentos. Havendo contato, a força de contato é no mínimo da mesma ordem da força de monopolo, muitas vezes sendo muito superior. E como os movimentos ocorrem em escalas de tempo curtas e com a presença de muitos fragmentos de massas semelhantes, não há em geral tempo suficiente para que os termos de multipolos de ordens mais altas de cada elipsóide façam diferença sensível no movimento. Possivelmente apenas em situações com escalas de tempo maiores, como interações apenas por forças de maré e órbitas de satélites os termos superiores do potencial seriam importantes. Assim, a modelagem apenas por monopolo gravitacional parece ser bastante adequada aos propósitos deste trabalho, e permite um ganho significativo de tempo por fazer com que a gravidade independa da orientação e não exerça torque sobre os fragmentos.

A força de contato foi definida a partir de seu potencial, de forma a ter como características: (a) potencial com inclinação muito pequena para grandes distâncias, de forma



a levar a uma força aproximadamente nula quando os corpos não estão em contato; (b) grande inclinação quando a distância entre as superfícies fosse pequena, de forma a levar a uma força repulsiva forte; (c) máximo do potencial alto, para evitar que os fragmentos se atravessassem, mas finito, de forma a não trazer problemas para o desenvolvimento das equações de movimento ou para as integrações numéricas.

A escolha para o potencial de contato foi então baseada nas densidades dos fragmentos, sendo definida como

$$V_{C_{i,j}} := V_0 \int d^3\vec{r} \rho_i(\vec{r}) \rho_j(\vec{r}) \quad (2.3)$$

Esta é também uma função gaussiana tridimensional, que se tiver sua largura e altura escolhidas adequadamente apresenta todas as características acima descritas como necessárias. Esta era inicialmente a mais incerta das suposições para a definição do modelo, uma vez que formalmente o potencial tem variação não nula a qualquer distância, levando a uma ação a longa distância, o que não seria adequado a uma força de contato. Como ilustrado na figura 2.1, no entanto, vê-se que com uma escolha adequada da altura e largura da gaussiana obtém-se um excelente comportamento do potencial para reproduzir uma força de contato ideal.

O modelo básico segue apenas estas hipóteses para sua definição. Como será discutido mais adiante, posteriormente incluímos um termo dissipativo, de forma a perder energia e momento angular. Como observado nos experimentos realizados em laboratório, esta perda de energia pode ser bastante expressiva, de forma que nos pareceu o efeito mais necessário a ser adicionado ao modelo básico desenvolvido no trabalho anterior. A dissipação também se faz bastante necessária para permitir que em um processo de acumulação de fragmentos (para gerar um corpo reacumulado a ser usado nas simulações, ou após uma colisão) o sistema possa relaxar a um estado de equilíbrio, que não seria atingido sem dissipar energia (os fragmentos permaneceriam colidindo entre si indefinidamente, nunca se aquiescendo). A dissipação foi incluída pelo uso de uma função de dissipação de Rayleigh, de forma a atuar apenas quando fragmentos estão em contato e seu movimento coletivo não é o de um corpo rígido.

2.1 Desenvolvimento das equações de movimento

As equações de movimento foram obtidas através do formalismo lagrangeano. Para tal, é necessário um conjunto de 6 variáveis independentes para cada elipsóide (o número de graus de liberdade para um corpo rígido com rotação e translação em 3 dimensões). A translação é simples de ser representada, o que foi feito apenas pelo uso do vetor posição do centro de cada fragmento. A parte não trivial corresponde à rotação, que é também a que consome a maior parte do tempo de processamento durante as integrações.

Optamos por utilizar a representação da rotação através de quatérnions. Os quatérnions foram introduzidos por Sir W. Hamilton em 1866. Estes permitem uma representação para a rotação em três dimensões mais conveniente para o trabalho numérico que algumas escolhas mais usuais, como variáveis do tipo ângulos de Euler, que podem apresentar problemas de indefinições, dependem de muitas operações trigonométricas e levam a equações não uniformes para suas várias componentes.

Um quatérnion q é formado por quatro componentes reais independentes, e utilizamos como representações

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{q} \\ q_4 \end{pmatrix}$$

onde \vec{q} é um vetor tridimensional, de componentes q_1, q_2, q_3 .

$$q = (q_4, \vec{q})$$

Na forma complexa:

$$q = q_4 \hat{1} + i\vec{q} \cdot \vec{\sigma}$$

onde $\hat{1}$ é uma matriz unitária e $\vec{\sigma}$ é o vetor formado pelas matrizes de Pauli:

$$\vec{\sigma} := \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Usamos aqui quatérnions de norma 1, de forma que cada quatérnion é definido, portanto, por 3 componentes reais independentes. Definimos também a operação de produto entre dois quatérnions, de forma que o quatérnion ab correspondente ao produto dos quatérnions a e b é

$$ab = (a_4b_4 - \vec{a} \cdot \vec{b})\hat{1} + i(a_4\vec{b} + b_4\vec{a} - (\vec{a} \times \vec{b})) \cdot \vec{\sigma}$$

O conjunto destes quatérnions munido desta operação corresponde ao grupo de SU(2) de transformações da matriz unitária 2x2, que é isomorfo ao grupo das rotações em 3 dimensões (O(3)). Desta forma, esta operação pode ser usada para estabelecer uma representação unívoca das rotações em três dimensões. Para a definição aqui usada, partimos de um vetor \vec{r}' , que corresponde a um vetor \vec{r} girado de um ângulo θ em torno do eixo dado pelo vetor unitário \hat{n} . Definindo os quatérnions $r := (0, \vec{r})$, $r' := (0, \vec{r}')$, obtemos que

$$q^{-1}\tilde{r}\tilde{q} = (0, \vec{r}') =: \tilde{r}'$$

Caso se use como quatérnion $q := (q_4, \vec{q})$ (que é o quatérnion que define a rotação)

$$\vec{q} := \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{n}$$

$$q_4 := \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

O quatérnion inverso q^{-1} que corresponde à rotação inversa é portanto $q^{-1} = (q_4, -\vec{q})$

Utilizando estes resultados, pode-se obter a matriz de rotação expressa em função dos quatérnions:

$$A = 2 \begin{pmatrix} q_1^2 + q_4^2 - \frac{1}{2} & q_1q_2 - q_3q_4 & q_1q_3 + q_2q_4 \\ q_1q_2 + q_3q_4 & q_2^2 + q_4^2 - \frac{1}{2} & q_2q_3 - q_1q_4 \\ q_1q_3 - q_2q_4 & q_2q_3 + q_1q_4 & q_3^2 + q_4^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.2 Desenvolvimento do lagrangeano do sistema

A energia potencial do sistema consiste apenas da soma do potencial gravitacional com o potencial de contato, que por sua vez são a soma dos potenciais de cada par de elipsóides.

O potencial de contato pode ser expresso de uma forma mais compacta,

$$V_{C_{i,j}} = V_0\rho_{i_0}\rho_{j_0} \sqrt{\frac{\pi^3}{C^3 \det|\Lambda_i + \Lambda_j|}} e^{-C(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^T Q_{i,j}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \quad (2.4)$$

Caso se use as definições

$$Q_{i,j} := \Lambda_i \frac{1}{\Lambda_i + \Lambda_j} \Lambda_j$$

onde as matrizes Λ_i e Λ_j são as matrizes que definem os elipsóides expressas no sistema de coordenadas fixo:

$$\Lambda_i := A_i^T(t) E_i A_i(t)$$

Apenas o termo de contato depende dos quatérnions, que são incluídos por meio das matrizes de rotação.

Quanto à energia cinética do sistema, esta consiste apenas da soma das energias de translação do centro de massa e rotação em torno do centro de massa, para cada fragmento. A energia de translação de cada fragmento é $\frac{1}{2}mv^2$, e a de rotação é $\frac{1}{2}\vec{\omega}^T I \vec{\omega}$. O termo de translação é expresso de forma trivial em função das velocidades dos centros de massa dos fragmentos. A energia cinética de rotação precisa de um desenvolvimento mais longo para ser expressa em termos dos quatérnions e suas derivadas, e o seu cálculo é o que consome a maior parte do tempo de integração.

Em um sistema de referência inercial, tanto as velocidades de rotação $\vec{\omega}$ quanto as matrizes de inércia I podem variar. Por este motivo, escolhemos utilizar ambos no sistema de referência fixo em relação ao fragmento, no qual a matriz de inércia é constante e diagonal, com suas componentes sendo os momentos de inércia em torno dos eixos principais. Neste sistema, os momentos de inércia são

$$\eta_3 = \rho_{i_0} c \frac{\pi}{C} \left(a \frac{b^3 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{C^3}} + b \frac{a^3 \sqrt{\pi}}{2\sqrt{C^3}} \right) = \rho_{i_0} abc \frac{\pi^{3/2}}{2C^{5/2}} (b^2 + a^2)$$

onde a, b, c são os semi-eixos principais do elipsóide e η_3 é o momento de inércia em torno do eixo c ; o resultado é análogo para os outros dois eixos

Para obter a velocidade angular a partir dos quatérnions, foi usado que $\frac{d}{dt}(A) = \vec{\omega} \times A$. Resolvendo para $\vec{\omega}$, obtém-se

$$\begin{pmatrix} \vec{\omega}' \\ 0 \end{pmatrix} =: 2W \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} = 2W\dot{q} = 2 \begin{pmatrix} W_{1,1}\dot{q}_1 + W_{1,2}\dot{q}_2 + W_{1,3}\dot{q}_3 + W_{1,4}\dot{q}_4 \\ W_{2,1}\dot{q}_1 + W_{2,2}\dot{q}_2 + W_{2,3}\dot{q}_3 + W_{2,4}\dot{q}_4 \\ W_{3,1}\dot{q}_1 + W_{3,2}\dot{q}_2 + W_{3,3}\dot{q}_3 + W_{3,4}\dot{q}_4 \\ W_{4,1}\dot{q}_1 + W_{4,2}\dot{q}_2 + W_{4,3}\dot{q}_3 + W_{4,4}\dot{q}_4 \end{pmatrix}$$

Onde foi usado o quatérnio $\omega := (0, \vec{\omega})$ e a definição

$$W := \begin{pmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & -q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & -q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}$$

De onde pode-se separar a dependência nos quatérnios e em suas derivadas.

Desta forma, o lagrangeano do sistema é

$$\begin{aligned} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, q, \dot{q}) = & \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} M_i \dot{\vec{r}}^T \dot{\vec{r}} + 2\dot{q}^T W^T \begin{pmatrix} I_i & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} W \dot{q} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(V_0 \rho_{i_0} \rho_{j_0} \sqrt{\frac{\pi^3}{C^3 \det|\Lambda_i + \Lambda_j|}} e^{-C(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^T Q_{i,j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} - G \frac{M_i M_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right) \end{aligned}$$

Mas este lagrangeano depende de $7N$ variáveis, uma vez que há quatro quatérnios; para aplicar a equação de Euler-Lagrange na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

é necessário ter um lagrangeano dependendo apenas de variáveis independentes, sendo portanto $6N$ variáveis. Este problema pode ser resolvido de duas formas: pode-se usar os $2N$ vínculos da normalização dos quatérnios para eliminar N variáveis e suas derivadas:

$$(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2) = 1$$

$$\Rightarrow q_4 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 + q_3\dot{q}_3 + q_4\dot{q}_4 &= \vec{q} \cdot \dot{\vec{q}} + q_4\dot{q}_4 = 0 \\ \Rightarrow \dot{q}_4 &= -\frac{\vec{q} \cdot \dot{\vec{q}}}{q_4} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ou pode-se usar o método de multiplicadores de Lagrange: usa-se o lagrangeano como apresentado inicialmente e as equações de movimento são obtidas ao alterar o lagrangeano para

$$\tilde{L} := L - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (q_i^2 - 1) \lambda_i(t) \quad (2.7)$$

onde $\lambda_i(t)$ são os multiplicadores de Lagrange, funções que são determinadas ao utilizar os vínculos. Os dois métodos foram implementados de forma independente, para verificar qual seria mais estável e eficiente.

2.3 Eliminação de variáveis no lagrangeano

A partir da normalização dos quatérnions pode-se eliminar uma das componentes dos quatérnions e sua derivada do lagrangeano. Estas equações são singulares quando esta componente é nula. Como as componentes variam ao longo do movimento, esta componente a ser eliminada varia, de forma que ela deve ser escolhida em cada passo durante a integração.

A dependência na componente escolhida para ser eliminada pode ser facilmente removida usando (2.5). Para a sua derivada, usamos as definições

$$q'_3 := \begin{pmatrix} q_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \vec{q}'_3 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$q'_{34} := q_3$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_3 &:= \begin{pmatrix} -q_1 & q_4 & -q_3 \\ -q_2 & q_3 & q_4 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 \end{pmatrix} \\ \vec{\chi}_3 &:= \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \\ -q_4 \end{pmatrix} \\ V_3 &:= \begin{pmatrix} -q_1 & q_4 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{V}_3 & -\vec{\chi}_3 \\ \vec{0}^T & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estas definições correspondem à eliminação da quarta componente. Para eliminar uma das outras, é usada uma definição semelhante para as novas variáveis. A energia cinética de rotação é então independente da derivada da componente selecionada:

$$T_{R_i} = \frac{1}{2} \dot{q}'_j \hat{T}_j \dot{q}'_j$$

Com

$$\hat{T}_j := 4 \left[\hat{V}_j^T I_i \hat{V}_j + \frac{1}{q_j} \hat{V}_j^T I_i \vec{\chi}_j \vec{q}'_j{}^T + \frac{1}{q_j} \vec{q}'_j \vec{\chi}_j^T I_i \hat{V}_j + \left(\frac{1}{q_j^2} \vec{\chi}_j^T I_i \vec{\chi}_j \right) \vec{q}'_j \vec{q}'_j{}^T \right]$$

2.4 Método dos multiplicadores de Lagrange

O lagrangeano é alterado para um lagrangeano efetivo que é idêntico ao anterior, quando os vínculos (2.5) forem incorporados:

$$\tilde{L} := L - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (q^2 - 1) \lambda_i(t)$$

As N funções escalares $\lambda_i(t)$ são os multiplicadores de Lagrange, a serem determinados através do uso dos vínculos, de onde se obtém

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= q \cdot \frac{\partial L}{\partial q} - q \cdot \dot{p} \\
\dot{p} &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} - q\lambda(t) \\
(1 - qq \cdot) \dot{p} &= (1 - qq \cdot) \frac{\partial L}{\partial q}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Restam N graus de liberdade a serem eliminados, que correspondem ao vínculo $q \cdot \dot{q} = 0$, que ainda não foi usado. Utilizando a definição dos momentos $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} =: M\dot{q}$,

$$0 = q \cdot \dot{q} = q^T M^{-1} p$$

Que ao ser derivada leva a

$$q^T M^{-1} \dot{p} = q^T M^{-1} \dot{M} M^{-1} p - p^T M^{-2} p$$

Que é a equação escalar a ser usada no lugar de uma das equações (2.8), que são um sistema de 4 equações com apenas 3 independentes. Assim como no método anterior, é necessário escolher uma das equações para eliminar; é também mais conveniente escolher a componente de q com maior módulo, levando então às equações de movimento

$$\begin{pmatrix} (1 - qq \cdot)^* \\ q_i^T M_i^{-1} \end{pmatrix} \dot{\tilde{p}}_i = \begin{pmatrix} (1 - qq \cdot)^* \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} \\ q_i^T M_i^{-1} \dot{M}_i M_i^{-1} p_i - p_i^T M_i^{-2} p_i \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

onde $(1 - qq \cdot)^*$ é o projetor $(1 - qq \cdot)$, sendo removida a linha correspondente à componente escolhida para ser eliminada (escolha que deve ser feita a cada passo de integração).

2.5 Implementação computacional

Foram realizadas duas implementações computacionais independentes, de forma a verificar o método mais estável e mais eficiente para a eliminação das variáveis adicionais e para a integração numérica. A implementação descrita no trabalho anterior utiliza a eliminação direta aqui descrita e faz a integração numérica por um método de

Runge-Kutta padrão, de ordem 1, 2 ou 4. Posteriormente, foi desenvolvida uma segunda implementação, que utiliza os multiplicadores de Lagrange para eliminação das componentes adicionais, e para a integração um algoritmo Burlisch-Stoer de passo variável, bastante mais sofisticado que o Runge-Kutta. Esta implementação também inclui a dissipação, não presente na anterior. Ambas foram desenvolvidas em FORTRAN, assim como os softwares adicionais desenvolvidos posteriormente.

Devido às diferenças no método de incorporação dos vínculos e no método de integração, apenas com uma comparação da performance das duas implementações não é imediato determinar qual dos dois fatores é o dominante nas diferenças de performance.

Quanto à eliminação das variáveis adicionais, apesar da grande diferença no seu desenvolvimento ambas se baseiam no mesmo critério para a escolha da variável a ser eliminada. Nas equações obtidas ao final, o método de multiplicadores de Lagrange chega a um sistema de 4 equações para quatro variáveis; são obtidas do Lagrangeano 4 equações, mas uma delas é substituída pela equação proveniente do vínculo. No método de eliminação direta, o vínculo é incorporado às equações de Euler-Lagrange para remover uma das componentes e sua equação correspondente; para cada escolha de variável a ser eliminada é usado um conjunto diferente de 3 equações para 3 variáveis (mas que têm a mesma estrutura), enquanto no outro método o conjunto de equações é sempre obtido da mesma forma.

No trabalho anterior foi realizada uma série de testes para verificar o funcionamento e a precisão do método e da implementação desenvolvidos. Como observado então, se manifestaram erros sistemáticos com a rotação, que é também o que consome a maior parte do tempo de computação. No trabalho atual foi verificado que os erros observados com a implementação da escolha de variáveis eram apenas erros de código, que foram reparados. Com este problema resolvido, foi observado que a mudança de variáveis utilizada por este método é estável, não sendo a responsável pelos erros identificados anteriormente. Ao utilizar um passo de integração constante há um erro periódico, que ocorre sempre que a maior componente dos quatérnions tem seu módulo distante da unidade. O erro gerado quando a maior componente se reduz é revertido quando ela passa a aumentar

(o que ocorre quando a maior componente muda), de forma que em uma rotação uniforme o erro tem uma componente não periódica muito menor que a periódica. Este comportamento já era esperado pelo desenvolvimento do método para eliminação da variável, pois como foi discutido anteriormente o erro deve aumentar quando a variável eliminada diminui de módulo.

Variando o passo de integração, no entanto, observa-se o erro reduzir de forma coerente ao método de integração. Desta forma, utilizando um critério de erro para determinar o tamanho do passo o erro periódico pode ser limitado, o que é realizado na última implementação, desenvolvida com passo variável.

Comparando a performance das duas implementações, foi observado que para baixas precisões a primeira implementação é mais rápida, mas ao exigir precisões altas ela exige uma redução muito grande no tamanho do passo, tornando-se mais lenta que a implementação com Burlisch-Stoer. Pela inclusão da dissipação, foi esta última a versão do código usada nas simulações realizadas neste trabalho.

2.6 Outros softwares desenvolvidos

Adicionalmente ao código para integração numérica, foram desenvolvidos outros programas para executar tarefas auxiliares, como visualização dos resultados, geração de condições iniciais, montagem de corpos reacumulados para serem usados nas integrações, manipulação de arquivos e identificação de corpos reacumulados ao final das integrações.

Para a visualização mais eficiente dos resultados, permitindo uma avaliação mais rápida, já haviam sido desenvolvidos anteriormente programas para conversão dos arquivos de saída em *scripts* para o software 3D Studio Max, que ainda é o utilizado para gerar animações mais elaboradas, como ilustrado nas figura 2.2. Fez-se necessário, no entanto, um sistema mais rápido para visualização dos movimentos. Foi então desenvolvida uma interface gráfica simples, com o objetivo principal de mostrar em tempo real os resultados sendo gerados na integração e visualizar diretamente os resultados obtidos anteriormente, sem a dependência de exportar os dados para outros programas.

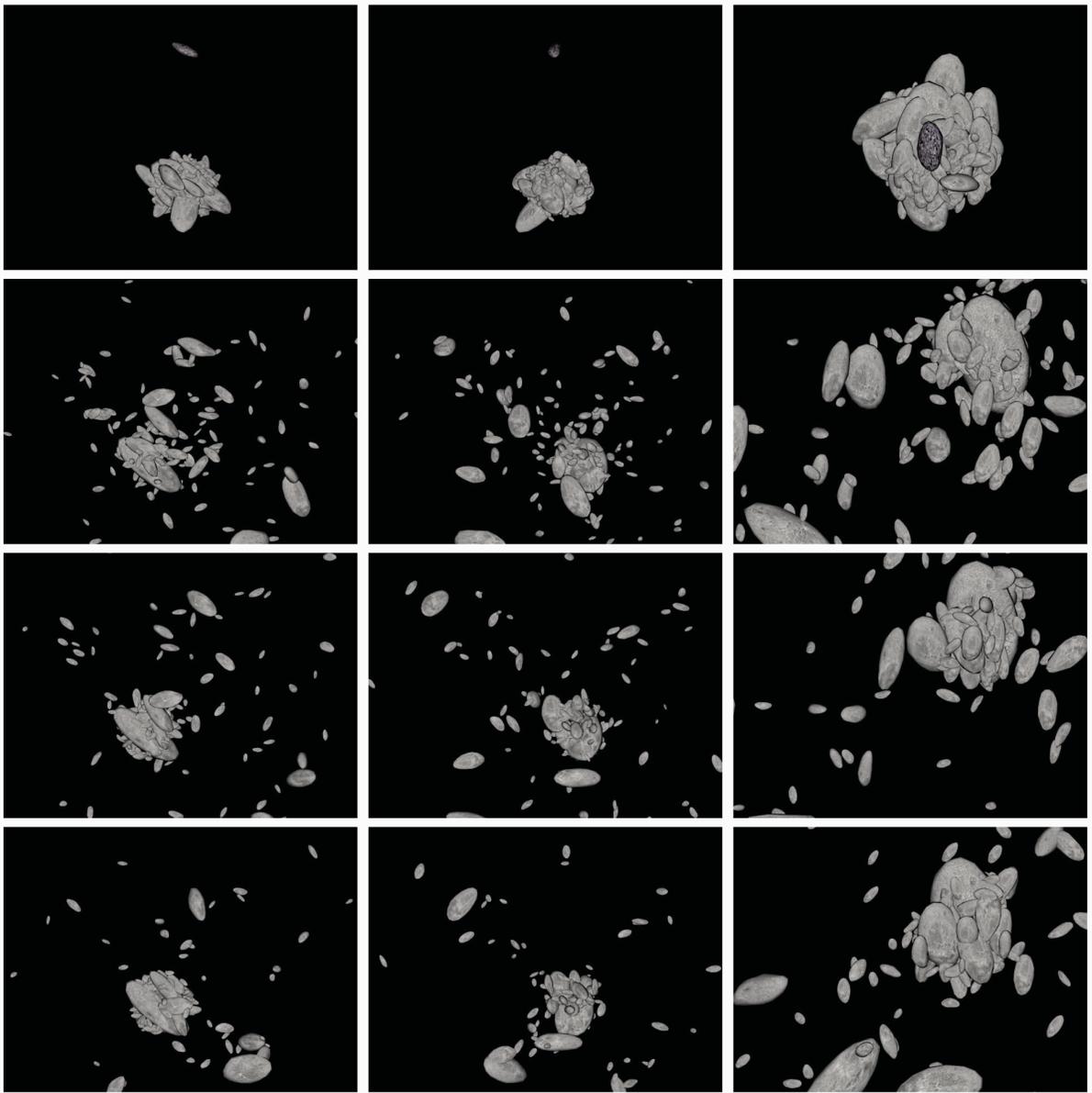


Figura 2.2: Uma ilustração de uma animação simples feita para visualizar os resultados de uma das fragmentações de progenitores de famílias. Foram usados 200 fragmentos para o alvo e um (de cor diferente) para o projétil. As colunas verticais correspondem à vista dos eixos x , y e z . Cada linha horizontal tem um momento diferente da colisão. Apenas para propósitos de ilustração, os fragmentos receberam texturas e um ruído em sua forma, para torná-la ligeiramente irregular.

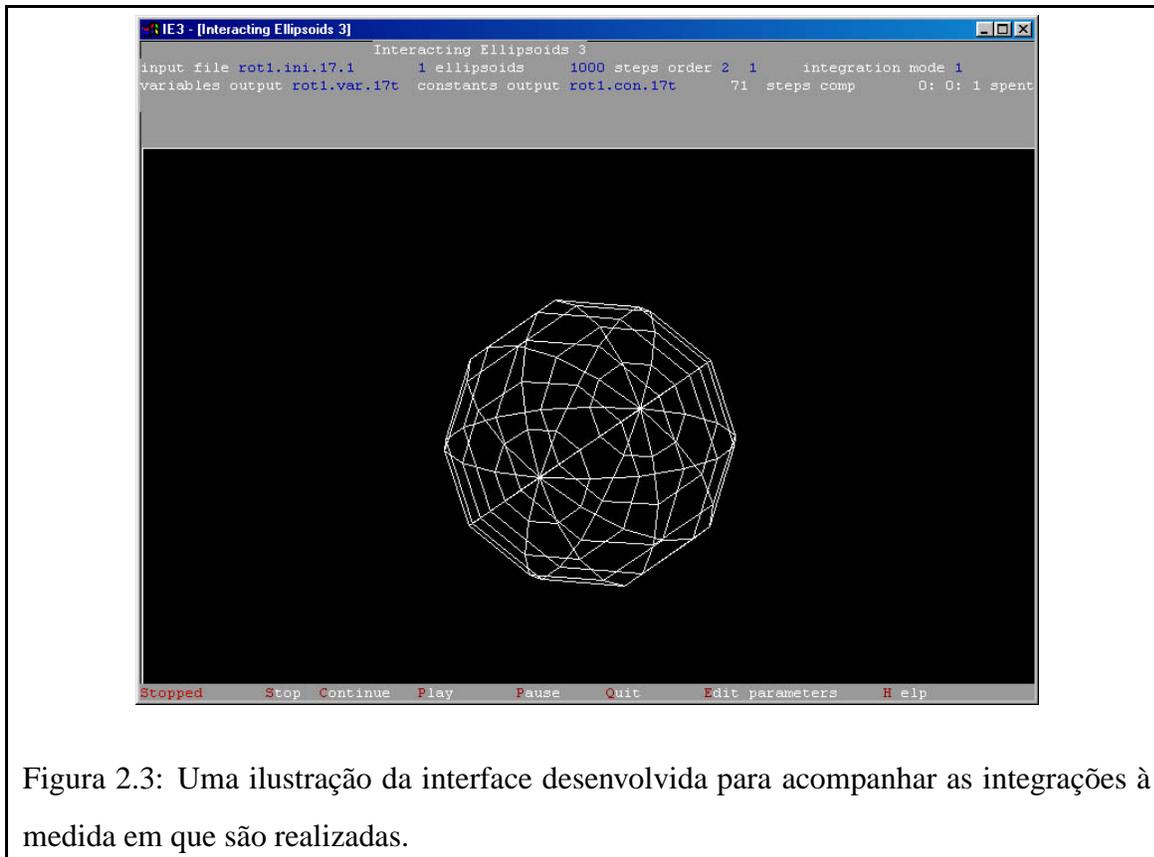


Figura 2.3: Uma ilustração da interface desenvolvida para acompanhar as integrações à medida em que são realizadas.

A figura 2.3 ilustra a interface desenvolvida. A visualização dos fragmentos é feita a partir de malhas de fios (*wireframes*), por serem bastante simples de serem calculadas e exibidas. A forma padrão de visualização mostra ao longo da integração os elipsóides vistos de uma perspectiva padrão, e ao final é exibido um gráfico da variação da energia e momento totais do sistema, que serve como referência para avaliação do nível de erro na integração. A visualização pode ser variada durante a exibição dos resultados e durante a integração, permitindo variar parâmetros de como são desenhados os elipsóides e de como são observados (variando a posição e orientação do observador). A interface usada pode ainda exportar qualquer quadro gerado por ela para arquivos de imagem (*bitmap*).

Esta interface foi desenvolvida apenas para resolver as necessidades observadas durante a realização das simulações, e é ainda muito simples. Futuros desenvolvimentos com os melhores resultados para agilizar as simulações consistiriam em integrar a ela os outros softwares desenvolvidos, como o identificador de corpos reacumulados e os

softwares para manipulação dos arquivos de dados.

Pequenos programas auxiliares foram desenvolvidos de forma a automatizar tarefas de manipulação e preparação de arquivos de dados e execução das integrações, o que foi bastante necessário para as séries de colisões do capítulo 4, onde foram realizadas milhares de colisões com centenas de alvos, reacumulados ou não. As tarefas auxiliares mais complexas foram a geração de alvos reacumulados e a identificação de corpos compostos de vários fragmentos com movimento coletivo de um corpo rígido.

A geração de alvos reacumulados foi feita basicamente pela própria integração com dissipação de sistemas formados pelos fragmentos a formarem os corpos reacumulados. Para fazer com que se acumulassem e acomodassem de forma rápida, estes fragmentos foram inicialmente dispostos com uma orientação aleatória, próximos entre si e com uma baixa rotação (da ordem de 0.01 a velocidade de rotação necessária para que estivessem em órbita). Após eles terem se acomodado uns aos outros, o corpo reacumulado resultante recebia uma rotação maior, uma vez que a rotação inicial foi exageradamente lenta para que sua acumulação exigisse menos tempo de integração. Os detalhes dos parâmetros usados na construção dos alvos são dados nos capítulos que tratam das simulações realizadas.

2.7 Identificação de corpos reacumulados

Uma das tarefas necessárias às nossas simulações é a identificação de conjuntos de elipsóides que estejam se movendo coletivamente como um corpo rígido, ou de forma próxima a um corpo rígido. Inicialmente, esta identificação era feita apenas por inspeção visual das animações, mas este é um método lento e ao qual falta um critério preciso. Para agilizar e sistematizar este processo foi desenvolvido um identificador de corpos compostos.

O critério básico para identificar se dois corpos têm um movimento conjunto de um corpo rígido é obtido a partir de suas velocidades. Para formar um corpo rígido, dois fragmentos precisam ter a mesma velocidade de rotação $\vec{\omega}$ e ter um movimento relativo tal que

$$\Delta \vec{v}_r := \vec{\omega} \times \vec{\Delta r} \quad (2.10)$$

sendo $\vec{\Delta v}$ e $\vec{\Delta r}$ a velocidade e posição relativas.

O critério aqui utilizado para calcular a diferença entre o movimento de dois fragmentos e o de um corpo perfeitamente rígido baseia-se na diferença nas velocidades de rotação e na diferença entre a velocidade de translação e a que seria observada em um corpo perfeitamente rígido, dada pela equação (2.10). O limite de diferença para o movimento dos elipsóides com relação ao de um corpo rígido é estabelecido através de um fator f adimensional: dois elipsóides são considerados acomodados caso suas velocidades de rotação tenham uma diferença inferior a $f\omega$, e se $\Delta v - \Delta v_r =: \vec{v}_d$, a diferença entre as velocidades relativas entre os fragmentos e a que eles deveriam ter para ter um movimento coerente, seja inferior ao mesmo limite $f\omega$.

Cada corpo reacumulado é definido por uma lista de todos os elipsóides que fazem parte dele. O programa inicia considerando o primeiro elipsóide como o primeiro corpo reacumulado (formado apenas por este fragmento), e todos os outros como fragmentos disponíveis para serem analisados. Dado um valor de f , o programa verifica para cada corpo reacumulado já existente se há algum elipsóide disponível para o qual as diferenças em sua velocidade de rotação e em \vec{v}_d são ambas com módulo menor que $f\omega$. Caso estes dois critérios sejam satisfeitos, o novo fragmento é adicionado à lista do corpo reacumulado, e removido da lista de corpos disponíveis. Este procedimento é repetido até que todos os corpos disponíveis tenham sido verificados, quando a lista do corpo reacumulado atual é encerrada. O programa então toma o primeiro fragmento ainda disponível (se ainda houver) como um novo corpo reacumulado com 1 fragmento, e repete a análise com todos os corpos ainda disponíveis.

A velocidade de comparação usada na avaliação dos novos fragmentos é tomada como a velocidade do primeiro fragmento pertencente ao corpo reacumulado. Esta definição é arbitrária, mas é baseada no fato de que trabalhamos sempre com arquivos ordenados por tamanho decrescente dos fragmentos, de forma que o primeiro é o maior. Pode haver portanto diferenças nos resultados de acordo com a ordem em que os fragmentos são

analisados. Consideramos que estas diferenças não são importantes se o fator f for pequeno em relação à variação encontrada na velocidade de fragmentos que não pertençam ao mesmo corpo. Esta condição é estabelecida pelo critério usado pelo programa para determinar o melhor valor de f , a ser discutido adiante.

Adicionalmente, quando termina a identificação dos corpos reacumulados o programa verifica em cada corpo identificado se os fragmentos que o formam são todos adjacentes, eliminando os que não o forem e os tomando como novos corpos reacumulados de 1 fragmento. Esta verificação destina-se a evitar que um fragmento distante do corpo reacumulado que por acaso tenha velocidades de rotação e translação compatíveis seja incluído. Os fragmentos assim eliminados não são novamente analisados para verificar se pertencem a um outro corpo reacumulado pela constatação de que caso os critérios de seleção sejam bem escolhidos é bastante raro que um fragmento seja excluído pelo critério de adjacência. Este critério é aplicado verificando para cada fragmento que forma o corpo composto se a distância entre ele e o fragmento mais próximo é inferior a um fator constante (da ordem de 1) multiplicado pela soma de seus semi-eixos maiores.

Ao final, o programa usa como velocidade de rotação de cada corpo composto a mediana de suas velocidades. Esta escolha se deve pelo fato de a mediana ser pouco influenciada pela eventual presença de alguns elementos com valores muito distantes da média. Em casos de identificações claras, a diferença entre os valores de seus membros não é considerável, de forma que esta correção não é importante.

Desta forma, o parâmetro mais importante para determinar a identificação é o fator f . O programa pode simplesmente identificar os corpos compostos com base em um valor de f determinado pelo usuário, mas para obter uma identificação mais eficiente foi implementado um procedimento de escolha no qual o programa identifica o melhor valor para f , deixando ao usuário apenas a escolha do critério a ser usado para esta seleção.

Os critérios implementados se baseiam na forma da função $n(f)$, que expressa o número de corpos reacumulados encontrados para cada valor de f . O programa inicialmente calcula esta função em um grande número de pontos, e a utiliza para determinar a escolha de f . Um dos parâmetros de entrada do usuário é o máximo aceitável para f ,

que tem o efeito de restringir o domínio de pesquisa usado.

Ao aumentar f , partindo do zero, o número de corpos reacumulados pode apenas diminuir; sua variação é sempre entre 1 e N , correspondendo aos casos em que todos os elipsóides fazem parte do mesmo corpo composto, e onde cada elipsóide é um corpo reacumulado de 1 fragmento, respectivamente. Desta forma, o máximo de $n(f)$ é sempre igual a $n(0)$ e o mínimo pode variar. O programa inicialmente determina qual é o menor intervalo de f no qual $n(f)$ vai do seu máximo até o seu mínimo, limitado pelo valor máximo de f dado pelo usuário. Esta restrição do domínio de $n(f)$ é realizada porque apenas nesta faixa de valores de f há variação em n , sendo portanto desnecessário analisar outros valores de f . O programa então calcula a função $n(f)$ em um grande número de pontos dentro deste intervalo. O número de pontos usado é da ordem de $10000N$, que leva a uma resolução razoável, uma vez que $n(f)$ é uma função monotonamente decrescente e que pode ter no máximo N valores distintos.

Ao aumentar o valor de f a partir de zero o número de fragmentos em corpos compostos em cada passo vai ou aumentar ou permanecer constante, tornando n ou menor ou constante. Em um sistema típico de muitos elipsóides em que vários deles estejam em um mesmo corpo composto e este corpo seja bem definido, espera-se que após ter aumentado f o suficiente para incluir todos os fragmentos do corpo reacumulado n permaneça constante em uma faixa larga de valores, até que se chegue ao ponto de incluir corpos espúrios. Nos sistemas em que temos trabalhado, onde há poucos fragmentos e apenas um corpo composto, esta região de n constante corresponde portanto ao mínimo de n , caso o corpo composto seja bem definido, pois o critério de proximidade vai impedir que novos corpos sejam acrescentados, independentemente do limite usado para f .

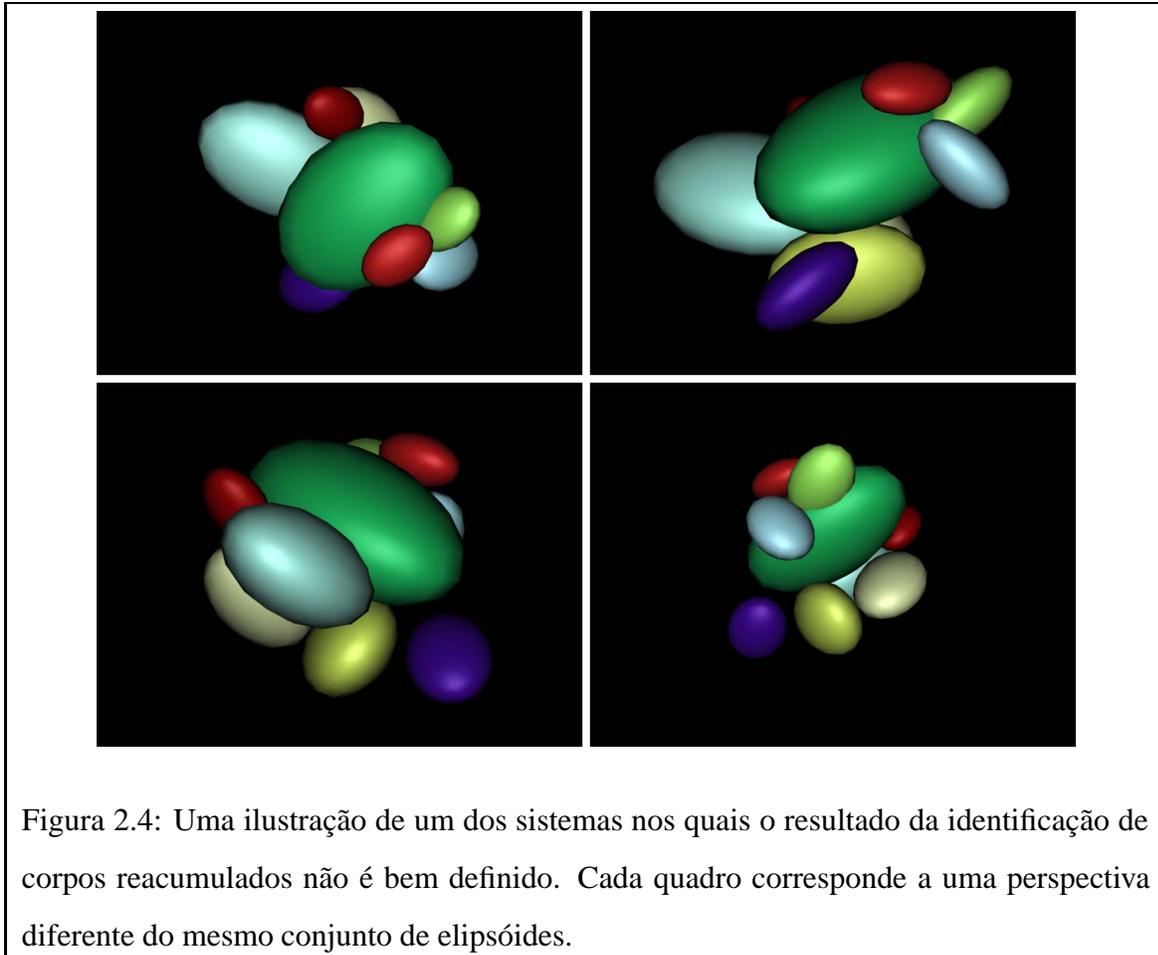
Desta forma, implementamos três critérios distintos para a escolha de f . Um deles não faz qualquer análise de $n(f)$, e simplesmente usa o valor de f dado pelo usuário. O segundo e o terceiro critérios têm como valor de entrada um número inteiro m ; para o segundo critério, é escolhido para f o valor correspondente à m -ésima maior região de $n(f)$ constante; o terceiro critério escolhe para f o valor da m -ésima região de $n(f)$ constante com o valor mais baixo de n . O segundo e terceiro critérios têm o seu domínio

de pesquisa restrito por um limite de f informado pelo usuário. Caso o usuário não esteja interessado em estabelecer este limite, o uso de um valor alto (da ordem de 1000) tem o efeito de ignorá-lo, uma vez que o domínio de pesquisa para f é restrito pela região na qual n varia; nos casos analisados nos testes, esta região raramente vai além de $f = 100$ - enquanto o seu início raramente se dá em valores menores que 0.01.

Desta forma, o primeiro critério é bastante arbitrário; o segundo e o terceiro com $m = 1$ são os mais razoáveis em princípio, com o segundo correspondendo a um critério mais restrito que o terceiro. Nos sistemas de teste utilizados para verificar o funcionamento do identificador, foi verificado que em geral o critério de inspeção visual concorda ou com o segundo ou o terceiro critério do programa com $m = 1$, dependendo de se assumir postura mais ou menos rígida ao realizar a identificação visual. As diferenças em geral só se manifestam nos casos em que os corpos compostos não são bem definidos visualmente. Desta forma, a identificação automática foi considerada como satisfatória, e foi usada em algumas das simulações do capítulo 4 sem que houvesse uma inspeção visual para confirmar o seus resultados. Algumas ilustrações de sistemas de teste onde não houve concordância entre a inspeção visual e a automatizada estão na figura 2.4.

2.8 Inclusão de dissipação

O modelo descrito anteriormente conserva energia e momento angular e linear, de forma que a dissipação parece ser o processo mais importante negligenciado. Para colisões reais, espera-se uma grande perda de energia e momento devido à dissipação por atrito e à ejeção de pequenos fragmentos a altas velocidades. A eficiência na transferência de energia pelo impacto tem sido estimada em laboratório e numericamente como da ordem de 0.01, embora valores de 0.01 a 0.5 já tenham sido encontrados. Como notado em Paolicchi et al. (2002), não se conhece a fração do momento angular levada pelos fragmentos pequenos (incluindo a poeira), que não são modelados ou observados, levando a uma perda de momento ao observar-se apenas os grandes, e a suposição de conservação do momento nestes fragmentos leva a rotações exageradamente rápidas. Embora não



se tenha modelado precisamente, espera-se que a perda de energia e momento aumente com o tamanho dos corpos envolvidos, por serem mais importantes as perdas devido a deformações e ao aquecimento do material.

Adicionalmente, um sistema conservativo não apresenta relaxamento para um estado de menor energia: na acumulação de fragmentos, estes nunca vão se acomodar, permanecendo movendo-se a baixas velocidades e colidindo entre si. Desta forma, procuramos alguma forma de incluir efeitos dissipativos no nosso modelo.

A dissipação foi modelada a partir de uma função de dissipação de Rayleigh, que corresponde a alterar as equações de movimento pela inclusão de uma função F de forma a tornar as equações de movimento

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{r}}} \quad (2.11)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{q}}} - \vec{q}\lambda(t) \quad (2.12)$$

O que faz com que a energia do sistema varie segundo $\frac{dH}{dt} = 2F$. A função de Rayleigh F é definida de forma a ser sempre negativa, de forma a sempre reduzir a energia. Para só atuar quando dois elipsóides estiverem em contato, a função foi definida de forma semelhante ao potencial de contato, sendo proporcional à quantidade de massa que se sobrepõe para cada par de elipsóides. Para que ela só atue quando os dois elipsóides em contato não se moverem de forma coerente, ela foi definida a partir da velocidade relativa entre os pontos em contato dos dois elipsóides.

A posição relativa ao sistema fixo de coordenadas de um ponto do elipsóide fixo a ele é

$$\vec{r}^i = \vec{r}_i + R_i \vec{\xi}_i$$

onde \vec{r}_i é a posição do centro de massa do elipsóide i em relação ao referencial inercial e R_i é a matriz de rotação que leva do referencial inercial ao referencial fixo no elipsóide. A velocidade deste ponto é obtida ao derivar esta expressão (na qual ξ_i é cons-

tante, pois o corpo é rígido):

$$\dot{r}^i = \dot{\vec{r}}_i + \dot{R}_i \vec{\xi}_i$$

Por outro lado, se este ponto também faz parte de outro elipsóide j (é parte da interseção dos dois), a velocidade dele como ponto fixo deste elipsóide é, de forma equivalente,

$$\dot{r}^j = \dot{\vec{r}}_j + \dot{R}_j \vec{\xi}_j$$

De forma que a condição de os dois elipsóides terem movimento de corpo rígido é que estas duas velocidades sejam iguais. A definição utilizada é então a função de dissipação mais simples que atende às características mencionadas anteriormente, sendo proporcional ao quadrado da diferença de velocidades $\dot{r}^i - \dot{r}^j$:

$$F := \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N F_{ij} F_{ij} := -F_0 \int d^3 r \rho_i(\vec{r}) \rho_j(\vec{r}) (\dot{r}^i - \dot{r}^j)^2 \quad (2.13)$$

Esta expressão pode ser expressa na forma

$$F_{ij} = -F_0 U_{ij} \left[\frac{1}{2C} \text{Tr}(\Gamma_{ij}^T (\Lambda_i + \Lambda_j)^{-1} \Gamma_{ij}) + (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j + \dot{R}_i R_i^T (\vec{r}_{ij} - \vec{r}_j) - \dot{R}_j R_j^T (\vec{r}_{ij} - \vec{r}_j))^2 \right] \quad (2.14)$$

onde U_{ij} é o potencial de contato entre os corpos i e j , $\Gamma_{ij} := \dot{R}_i R_i^T - \dot{R}_j R_j^T = -\Gamma_{ji}$, $\text{Tr}(A)$ é o traço da matriz A e $\vec{r}_{ij} := \vec{r}_i - \vec{r}_j$, e a constante positiva F_0 define o quão forte é a dissipação. Nos testes realizados para colisões formadoras de famílias, valores da ordem de $F_0 = 1$ levam às velocidades de ejeção típicas obtidas para as famílias (100m/s).

Esta função leva à dissipação de energia, mas conserva o momento linear e angular total do sistema. Outras funções com uma forma semelhante mas que não conservam o momento total podem ser usadas, de forma a modelar a perda de momento pelos fragmentos pequenos que são ejetados a altas velocidades e não são incluídos explicitamente nas simulações.

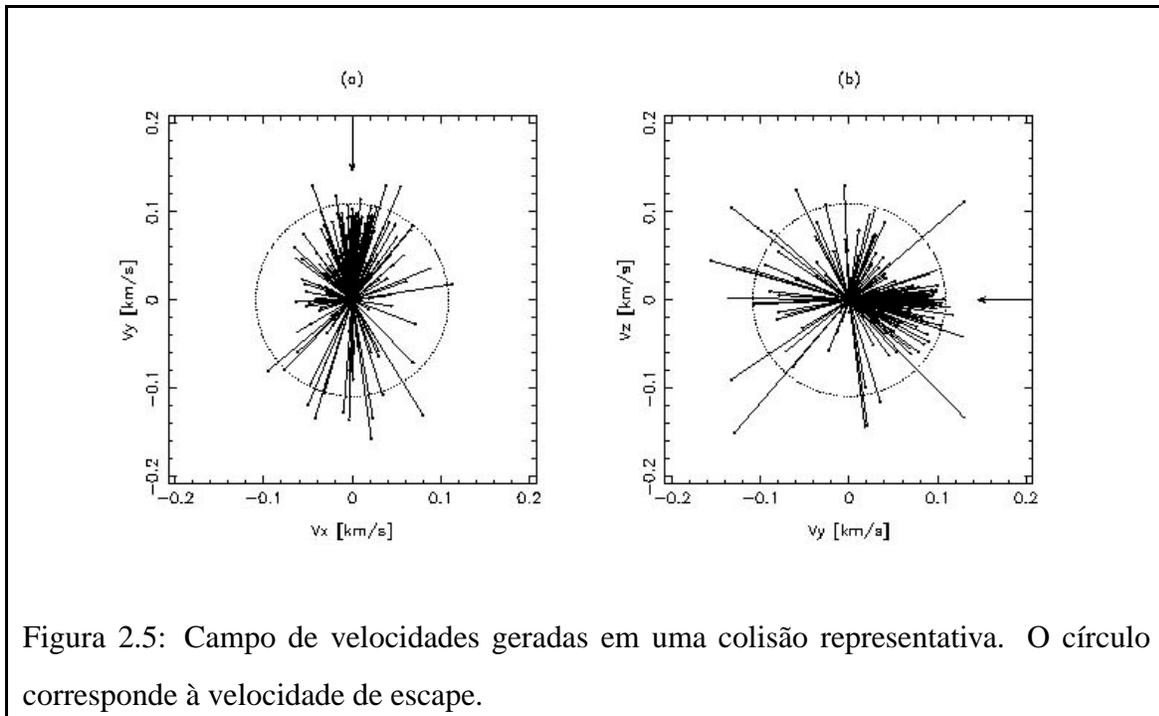
2.9 Simulações de colisões com alvos reacumulados

As primeiras simulações utilizando este modelo para a fragmentação de corpos reacumulados constam no artigo submetido para publicação na revista *Icarus*. Estas simulações consistiram de colisões de projéteis formados por um fragmento contra alvos reacumulados de 30, 100 e 200 fragmentos, como o mostrado na figura 2.2.

Os fragmentos e o projétil utilizaram como razões de seus eixos principais os valores clássicos 1:0.7:0.5, com os fragmentos do alvo se distribuindo em uma lei de potências para o diâmetro, com índice (cumulativo) 2.5. Inicialmente, os alvos foram montados como descrito anteriormente, deixando que os elipsóides se agregassem e interagissem até que se acomodassem, resultando em alvos com cerca de 100Km de raio e porosidades em torno de 1/3. Os alvos foram então colocados em rotação (períodos de 4 e 12 horas), e as colisões foram realizadas a 5Km/s, com diferentes ângulos de impacto.

Alguns dos resultados obtidos estão ilustrados nas figuras 2.5, 2.6 e 2.7. Dentre os resultados mais claros, foi observado que os resultados foram muito semelhantes para os alvos com período de 4 e 12 horas, enquanto que há uma diferença significativa nas velocidades de ejeção e de rotação dos fragmentos para diferentes ângulos entre a direção do impacto e o eixo de rotação.

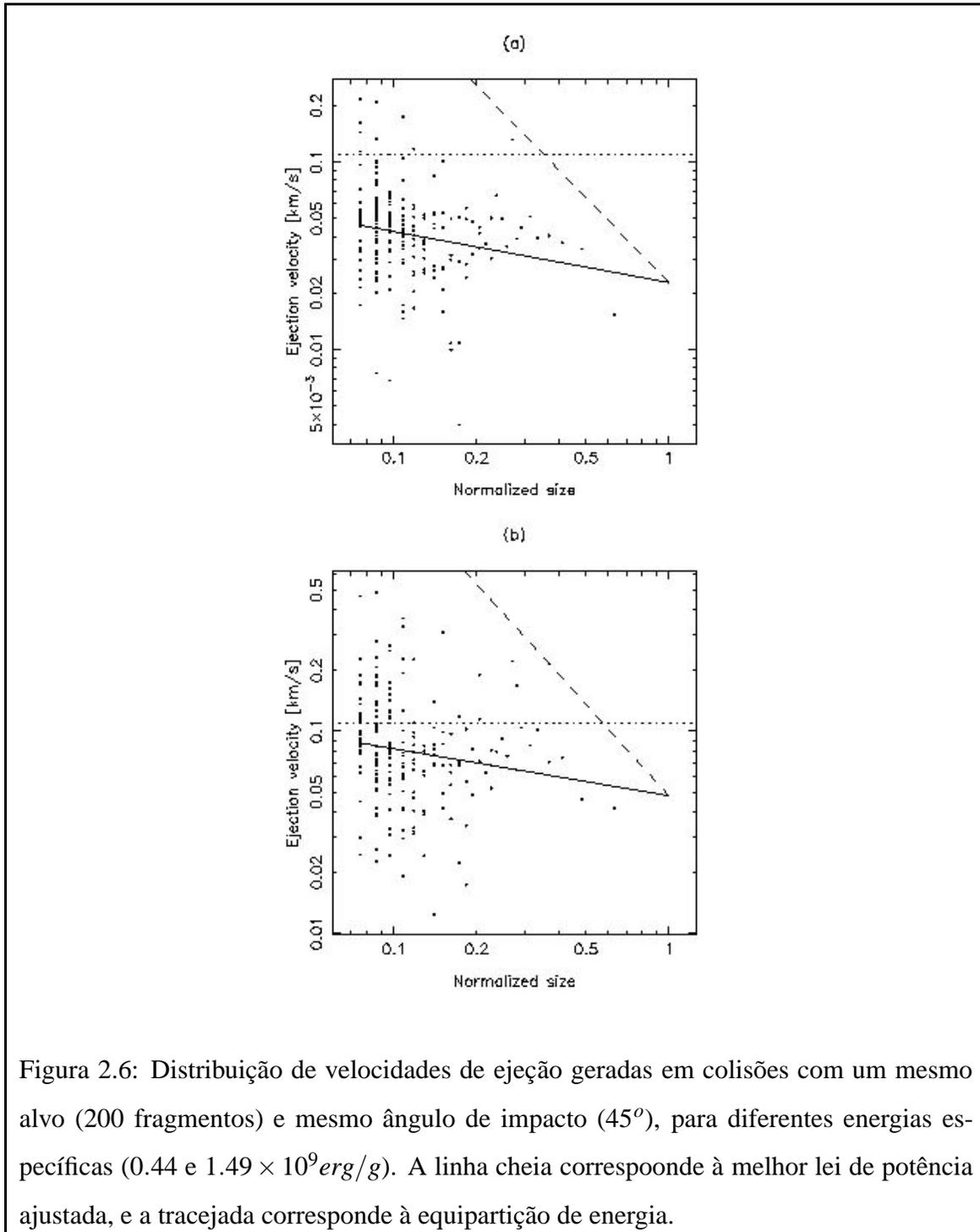
A eficiência da transmissão de energia cinética é semelhante à observada em estudos de laboratório e simulações de SPH, em torno de 1 a 5%. Foi observado que no momento do impacto a energia do projétil é transferida quase integralmente aos fragmentos, que posteriormente perdem grande parte desta energia pela atuação da dissipação, resultando na eficiência mencionada acima. Embora em torno de 80 a 90% da energia corresponda à energia de translação, ainda se observa rotações muito rápidas para a maior parte dos fragmentos, um resultado é semelhante ao observado pelos modelos SPH. Os períodos variam de alguns minutos a 1 hora para os menores fragmentos, e os maiores tendo períodos próximos aos iniciais. Como pode ser observado na figura 2.8 há um grande espalhamento na distribuição de períodos (também observado no SPH) com todas as velocidades de rotação estando abaixo do valor correspondente à equipartição de energia. De forma



semelhante, as distribuições de velocidade de ejeção também têm grande espalhamento e se situam abaixo do limite da equipartição de energia.

Finalmente, foi observado que os fragmentos apresentam uma grande variação de orientações de seus eixos de rotação, estando quase todos com rotação complexa. Este resultado é semelhante ao observado em simulações SPH, e é coerente com a idéia de que a rotação complexa seja um resultado típico de colisões e que os asteróides observados tenham predominantemente rotação simples apenas por terem dissipado seu excesso de energia rotacional, como discutido anteriormente.

De uma forma geral, foi observado que o modelo reproduz muitas das características esperadas para as colisões modeladas. É importante ressaltar que estes resultados, e os apresentados no capítulo 4, são as primeiras aplicações deste modelo, que ainda está em desenvolvimento. O objetivo é um desenvolvimento gradual do modelo, de forma a identificar como cada fenômeno modelado influi nos resultados das simulações. A análise destes resultados é voltada para identificar as propriedades mais importantes dos processos colisionais de uma forma geral, e não modelar detalhadamente um evento específico.



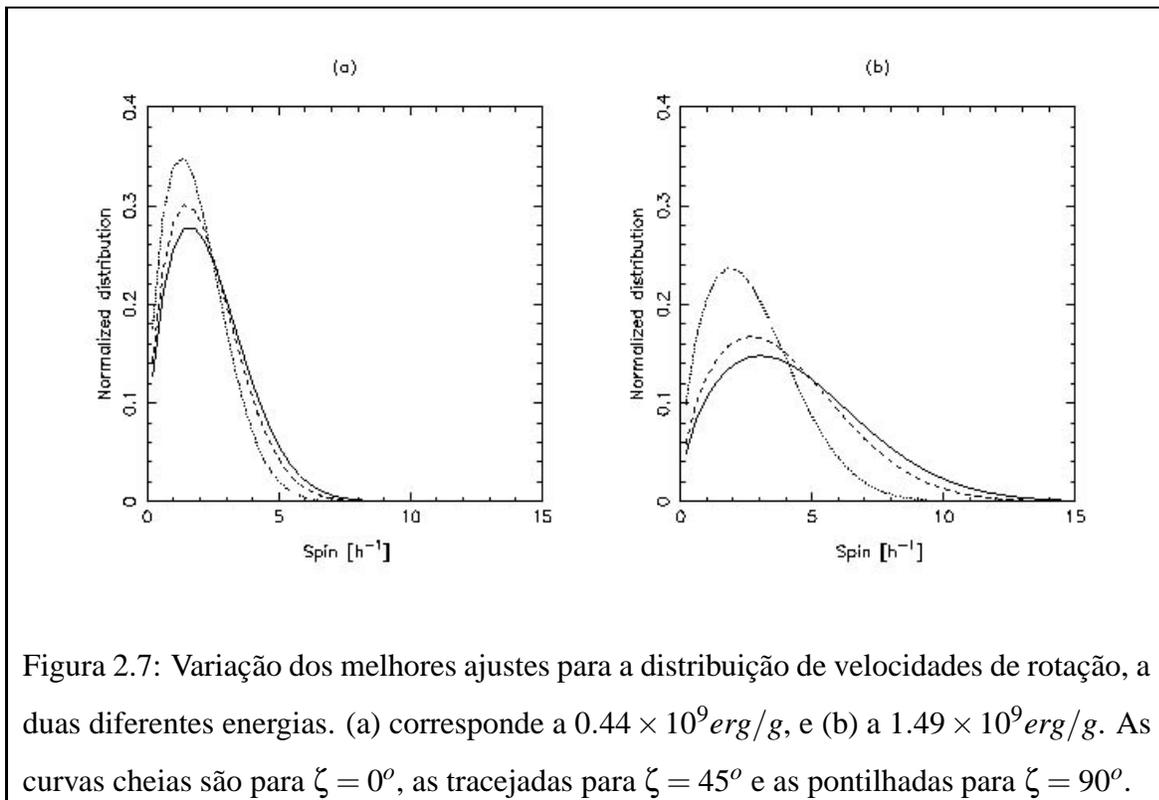
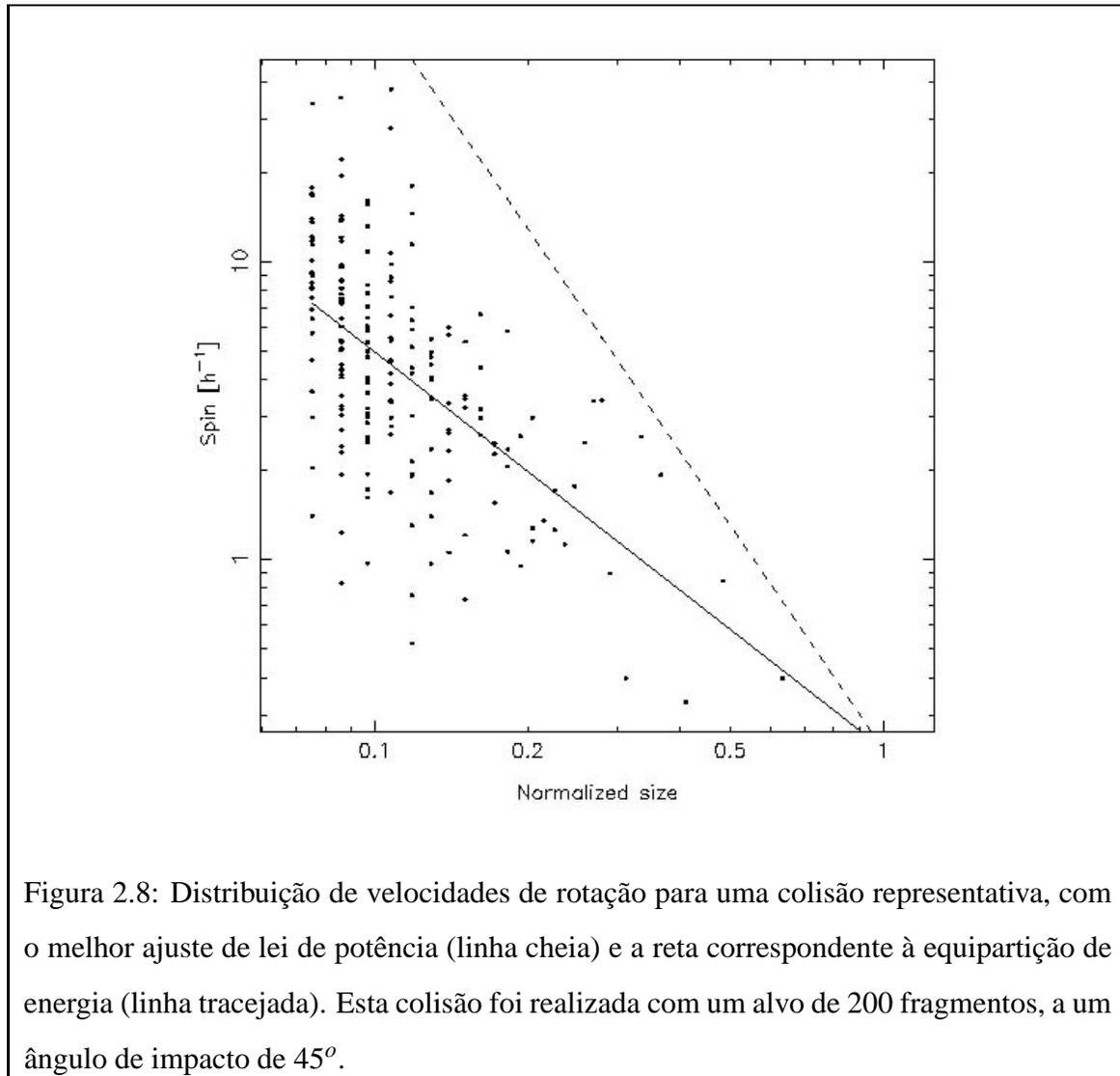


Figura 2.7: Variação dos melhores ajustes para a distribuição de velocidades de rotação, a duas diferentes energias. (a) corresponde a $0.44 \times 10^9 \text{ erg/g}$, e (b) a $1.49 \times 10^9 \text{ erg/g}$. As curvas cheias são para $\zeta = 0^\circ$, as tracejadas para $\zeta = 45^\circ$ e as pontilhadas para $\zeta = 90^\circ$.



Capítulo 3

O modelo de evolução rotacional de Harris

Um dos poucos estudos analíticos existentes para a evolução da rotação de asteróides provocada por colisões foi realizado por Harris, publicado em 1979. Neste trabalho são obtidas equações diferenciais para a variação da rotação de um asteróide submetido a impactos de uma população de projéteis, resultando em variação da massa e do momento angular do alvo.

Neste modelo, um asteróide sofre colisões de direções aleatórias uniformemente distribuídas, com uma velocidade fixa (5 Km/s). Os alvos são esféricos, variando de massa pela acreção dos projéteis e escape de fragmentos. Os projéteis são distribuídos segundo uma lei de potências para a suas massas:

$$n(m')dm' = n_C \frac{m'^{-q} dm'}{m_1^{1-q}} \quad (3.1)$$

onde m_1 é a massa do maior fragmento a colidir com o alvo (de massa m), $n(m')$ é o número de fragmentos com massa entre m' e $m' + dm'$, n_C é uma constante de normalização e q é a potência que caracteriza a distribuição.

A constante de normalização n_C é definida de forma que haja apenas um fragmento com massa da ordem de m_1 . m_1 é, portanto, a massa do maior fragmento que se espera

colidir com o alvo de massa m . Uma escolha bastante natural é portanto a massa mínima para o projétil causar uma fragmentação catastrófica do alvo, colidindo com parâmetro de impacto nulo e com a velocidade aqui utilizada (5 Km/s). Apesar de esta ser uma definição natural para m_1 , é problemática, pois o seu valor depende de conhecer a relação entre os parâmetros do impacto (velocidade, ângulo de impacto) e do projétil e alvo (tamanho, densidade, resistência à fragmentação) e o grau de fragmentação resultante. Neste caso, como todos os outros parâmetros são mantidos constantes, m_1 dependerá apenas de m .

n_C pode então ser obtido de forma imediata:

$$n_C := \int_{m_2}^{m_1} \frac{m'^{-q} dm'}{m_1^{1-q}} = \frac{m_1^{1-q} - m_2^{1-q}}{(1-q)m_1^{1-q}} = 1 - \frac{m_2^{1-q}}{(1-q)m_1^{1-q}} \quad (3.2)$$

onde m_2 é a massa do segundo maior projétil. m_2 e q definem, portanto o quão concentrada é a distribuição de massa dos fragmentos. A massa total colidindo com m é portanto:

$$\Delta m := \int_0^{m_1} m' n(m') dm' = \int_0^{m_1} n_C \frac{m'^{1-q} dm'}{m_1^{1-q}} = n_C \frac{m_1^{2-q}}{m_1^{1-q}} = 1 - \frac{m_2^{1-q}}{(2-q)m_1^{1-q}} \quad (3.3)$$

O que impõe que $q < 2$, de forma que a massa Δm seja finita. Como comentado no capítulo 1, o resultado clássico para uma população em equilíbrio colisional prevê um valor de 11/6 para q (Dohnanyi, 1969).

Nos estudos realizados até então (Napier e Dodd 1974, Dohnanyi 1976) a variação da massa do alvo foi desconsiderada. Como o único efeito das colisões era a adição do momento angular, o resultado era que a rotação não se estabilizava em algum valor, aumentando indefinidamente com o número de colisões. No modelo de Harris foi considerada também a adição de massa pelos projéteis. Desta forma, um projétil traz momento angular (o que contribui para acelerar a rotação do alvo), mas também aumenta o seu momento de inércia (o que contribui para desacelerar a rotação). De acordo com a velocidade de rotação do alvo antes do impacto, a velocidade de impacto e as massas do alvo e do projétil, uma colisão pode tanto acelerar como desacelerar o alvo.

A rotação do projétil é desconsiderada neste modelo, o que é razoável para colisões de alta velocidade, uma vez que o momento angular de rotação do projétil seria muito

pequeno comparado ao momento angular orbital, a massa do projétil é bastante menor que a do alvo e a velocidade superficial de um projétil com rotação seria muito menor que a velocidade de impacto.

O momento angular adicionado por cada colisão tem uma orientação aleatória com distribuição uniforme, o que faz com que a variação provocada no momento angular do alvo possa ser obtida pela soma quadrática dos momentos angulares das colisões, o que leva a:

$$\Delta(h^2) = \int_0^{m_1} \zeta^2 m'^2 v'^2 l'^2 n(m') dm'$$

Com l sendo o parâmetro de impacto, e ζ uma constante adimensional para considerar a possibilidade de não conservação do momento angular. A gravidade do alvo aumenta a sua seção de choque, por desviar as trajetórias dos projéteis, correspondendo a $r'^2 (1 + v_e'^2/v^2)$ (Safronov e Zvjagina, 1969). A velocidade de escape v_e da superfície de um alvo esférico de densidade constante ρ é $v = r\sqrt{\frac{8G\pi\rho}{3}}$, correspondendo, para densidades típicas de asteróides ($3g/cm^3$) a cerca de $1.2r(m/s)Km^{-1}$. Desta forma, o desvio provocado pelo alvo na trajetória do projétil pode ser desprezado neste regime de altas velocidades. É usado então o valor médio $l'^2 = \frac{1}{2}r^2$. Assim, chega-se a

$$\Delta(h^2) = \zeta^2 \frac{m_1^2 r^2 v^2}{2(3-q)} \quad (3.4)$$

A variação no momento angular pode então ser obtida através deste resultado usando que $\Delta(h^2) = 2h\Delta h$. Como os alvos são assumidos sempre esféricos e de densidade constante, mesmo que sua massa varie, $h = \frac{2}{5}mr^2\omega$. Desta forma, e usando que $m_1 = \frac{(2-q)}{n_c}\Delta m$, obtém-se

$$\Delta h = \zeta^2 \frac{5}{8} \frac{2-q}{3-q} \frac{m_1}{m} \frac{\Delta m v^2}{\omega} \quad (3.5)$$

Por outro lado, esta expressão corresponde à diferencial do momento angular, obtida

levando-se em consideração a variação da velocidade angular e do raio:

$$h = \frac{2}{5}mr^2\omega$$

$$dh = \frac{2}{5}(r^2\omega dm + m\omega d(r^2) + mr^2 d\omega) = \frac{2}{5}(r^2\omega dm + 2m\omega r \frac{dr}{dm} dm + mr^2 d\omega) = \frac{2}{5}[dm\omega(r^2 + 2r\frac{r}{3m}) + mr^2\omega]$$

$$dh = \frac{2}{5}mr^2 d\omega + \frac{2}{3}r^2\omega dm \quad (3.6)$$

(Usando que para uma esfera $\frac{dm}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4\pi r^3 \rho}{3}\right) = 4\pi r^2 \rho = \frac{3m}{r}$).

Desta forma, igualando (3.5) e (3.6) obtém-se a equação diferencial para a variação da velocidade de rotação com a massa:

$$\frac{d\omega}{dm} = \zeta^2 \frac{25}{16} \frac{2 - q}{3 - q} \frac{m_1}{m} \frac{v^2}{mr^2\omega} - \frac{5}{3} \frac{\omega}{m} \quad (3.7)$$

O termo positivo nesta equação corresponde ao aumento na velocidade de rotação provocado pela adição de momento angular. O termo negativo, que é o que foi negligenciado nos trabalhos anteriores, é o responsável pela redução na velocidade de rotação devida ao aumento momento de inércia do alvo. Este termo passou a ser conhecido como arrasto dinâmico, e é o que impede que a rotação aumente indefinidamente, levando a um eventual equilíbrio entre aceleração e desaceleração.

O parâmetro ζ faz o controle da eficiência da transferência de momento angular na colisão: colisões sem transferência de momento angular, como colisões elásticas entre esferas, correspondem a $\zeta = 0$. Para colisões sem ejeção de massa, $\zeta = 1$. $\zeta > 1$ corresponde a uma ejeção anisotrópica de fragmentos, ocorrendo preferencialmente na direção do impacto. Se toda a massa do projétil é projetada de volta na direção de incidência, $\zeta = 2$.

A perda de massa do alvo é caracterizada através da redução total no raio por todo o fluxo de projéteis, considerada como sendo uma razão constante do tamanho do alvo: $\Delta r = \alpha r$. Para uma colisão catastrófica, $\alpha = 0.2$. Desta forma, a variação do raio por massa de projéteis é

$$\frac{\Delta r}{\Delta m} = -\alpha(2-q) \frac{m}{m_1} \frac{r}{m} \quad (3.8)$$

Combinando esta equação com a equação (3.7) chega-se a

$$\frac{d\omega}{dr} = - \left(\frac{25}{16(3-q)\alpha} \zeta^2 \right) \left(\frac{m_1}{m} \right)^2 \frac{v^2}{r^3 \omega} + \left(\frac{5}{3(2-q)\alpha} \right) \frac{m_1}{m} \frac{\omega}{r} \quad (3.9)$$

sendo m_1 a massa necessária para provocar uma fragmentação catastrófica. Ela foi obtida igualando a energia cinética do projétil à energia necessária para fragmentar o alvo, na forma $E = \frac{3\gamma}{5} \frac{Gm^2}{r} + \frac{mS}{\rho}$, que corresponde à soma da energia gravitacional à energia de coesão do material. O fator γ foi incluído para contabilizar a eficiência do impacto para transmitir a energia aos fragmentos, levando à sua dispersão. S corresponde à densidade de energia necessária para fragmentar o alvo. Neste trabalho, é assumido que esta energia corresponda à tensão limite suportada pelo corpo.

A solução para a equação (3.9) foi obtida após passá-la à forma adimensional

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu}{\alpha} \left[\frac{15}{8} \frac{\gamma \zeta^2}{3-q} \frac{(1+x^2)^2}{yx^3} - \frac{5}{3} \frac{1}{2-q} \frac{y(1+x^2)}{x} \right] \quad (3.10)$$

onde foram usados

$$y := \frac{\omega}{\omega_s}$$

$$\omega_s := \sqrt{\frac{4}{3} \pi \rho G}$$

$$x := \frac{r}{r_0}$$

$$r_0 := \sqrt{\frac{5}{3} \frac{S}{\gamma \rho}} \omega_s^{-1}$$

$$\mu := \frac{2S}{\rho v^2}$$

Estas definições correspondem à frequência orbital na superfície do alvo (ω_s), o raio para o qual a energia gravitacional iguala a energia de coesão (r_0) e a razão de massas

limite para colisões catastróficas no regime de coesão do material (μ): $\frac{m_1}{m} = \mu(1 + x^2)$. Nestas variáveis, os regimes de coesão e gravitação são definidos para $x \ll 1$ e $x \gg 1$, respectivamente. A frequência orbital na superfície do asteróide corresponde à máxima velocidade de rotação que um corpo sem coesão pode ter sem que ele comece a se desfazer, e depende apenas da densidade do material. Seu valor é cerca de 0.95h para densidades típicas ($3gcm^{-3}$).

A solução assintótica da equação (3.10) para $x \gg 1$ pode ser obtida de forma imediata:

$$\frac{dy}{dx} \approx -\frac{\mu}{\alpha} \left[\frac{15\gamma\zeta^2}{8(3-q)} \frac{x}{y} - \frac{5}{3(2-q)} xy \right]$$

Cuja solução é uma taxa de rotação constante com o tamanho:

$$y = \left(\frac{9}{8} \frac{2-q}{3-q} \right)^{1/2} \zeta \quad (3.11)$$

Sendo esta solução atingida rapidamente para

$$x_0 > \left[\frac{3(2-q)\alpha}{5\mu} \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

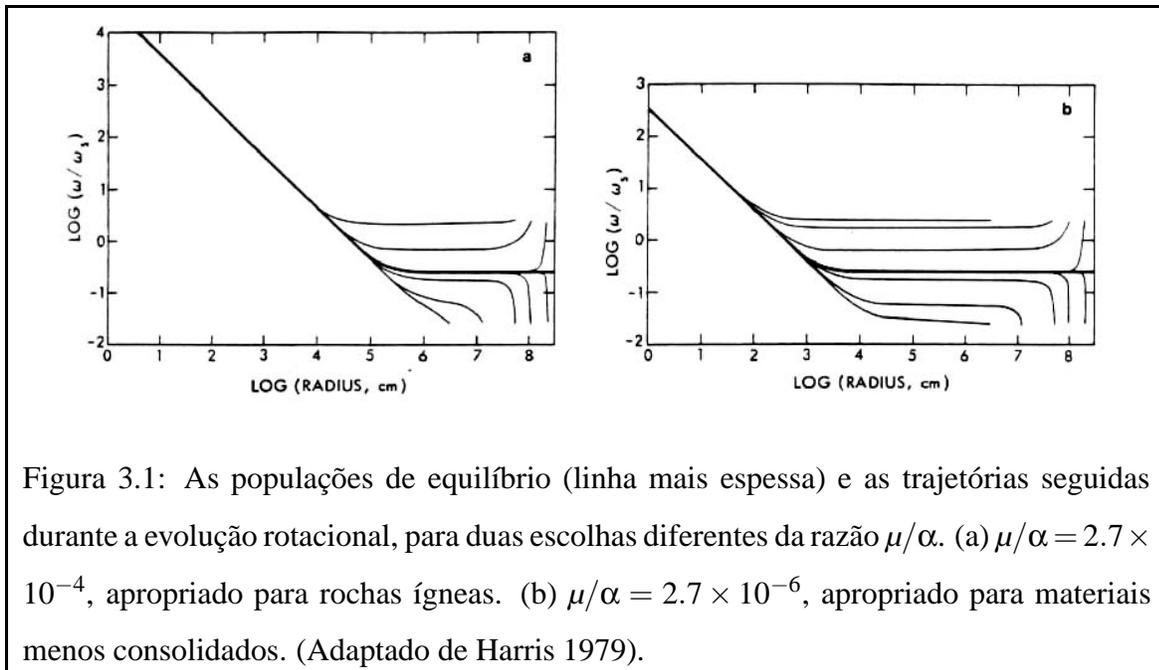
Para o outro extremo ($x \ll 1$), a equação (3.10) se torna

$$\frac{dy}{dx} \approx -\frac{\mu}{\alpha} \left[\frac{15\gamma\zeta^2}{8(3-q)} \frac{1}{yx^3} - \frac{5}{3(2-q)} \frac{y}{x} \right]$$

Que tem como solução uma velocidade de rotação inversamente proporcional ao tamanho:

$$y = \left[\frac{8}{9} \frac{3-q}{2-q} + \frac{8(3-q)\alpha}{15\mu} \right]^{-1/2} \gamma^{1/2} \zeta x^{-1} \approx \left[\frac{15\gamma}{8(3-q)\alpha} \right] \zeta x^{-1} \quad (3.13)$$

Soluções numéricas para a equação não aproximada (3.10) mostram o mesmo comportamento nos extremos, e a solução de equilíbrio pode ser aproximada pela soma quadrática das soluções para os extremos. Os resultados podem ser vistos na figura 3.1.



Vê-se que na evolução para um alvo inicialmente grande (segundo (3.12)) este rapidamente atinge a constante de equilíbrio e então mantém-se nesta velocidade de rotação até atingir a solução para $x < 1$. Caso contrário, o alvo mantém sua rotação constante (move-se apenas para a esquerda no gráfico da figura 3.1), até atingir a solução para $x < 1$.

Observando que estas soluções são proporcionais a $\sqrt{\rho}$, Harris, concluiu que a diferença então observada nas velocidades médias de rotação de asteróides C e S (a velocidade dos C era aproximadamente 0.8 a velocidade dos S) corresponderia a uma diferença nas densidades médias, de um fator próximo de 2:3. Atualmente, no entanto, não se verifica tal tendência de separação nas velocidades de rotação.

O raio a partir do qual os alvos evoluem rapidamente para a solução de equilíbrio, em forma dimensional é $r > \left[\frac{2-g}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \right]^{1/2} \frac{v}{\omega_s}$, que corresponde a um valor de cerca de 600Km para $\alpha = 0.3$, $\gamma = 2$ e $v = 5Km/s$. Desta forma, para que uma população inicial de asteróides tenha chegado a um equilíbrio em tempo curto ela deveria ter sua massa concentrada em corpos maiores que este valor.

Em forma dimensional, o raio onde ocorre a transição entre as duas soluções para a

velocidade de rotação é $r = \frac{5}{3} \left[\frac{2}{(2-q)\alpha\gamma} \right]^{1/2} \frac{S}{\rho v \omega_s}$, que corresponde a cerca de 2Km para $S = 3 \times 10^7 \text{ erg/cm}^3$, que segundo o autor seria um valor apropriado para rochas ígneas fortes. Para corpos mais fortes, como asteróides metálicos, este valor seria 10 a 100 vezes maior, correspondendo a um raio de transição em torno de 50Km.

Desta forma, a observação do raio de transição em uma população poderia ser usada como indicativo de suas propriedades físicas. Na época, pela falta de observações de corpos pequenos não era possível tirar alguma conclusão a partir deste fato. Como foi comentado no capítulo 1, a determinação do raio onde ocorre a transição do regime de coesão para o regime gravitacional é uma das grandes questões atuais, ainda sem um consenso.

O valor de α é determinado pela definição de que o maior impacto leva a uma fragmentação catastrófica, correspondendo a $\alpha = 0.2$, e Harris usou então $\alpha = 0.3 \pm 0.1$. Devido à perda de energia, o fator γ deve ser maior que 1, e Harris usou como limite máximo 7, segundo medidas anteriores. Valores atuais para a eficiência do impacto (normalmente referidos à fração da energia cinética do impacto que é transferida aos fragmentos) são bastante discutidos, indo de 0.01 a 0.5. O valor de ζ foi encontrado ajustando a solução encontrada ao período médio dos asteróides. Para escolhas extremas dos outros parâmetros, Harris encontrou que ζ deveria variar entre 0.2 e 1. De forma semelhante os valores de S e μ têm sido muito discutidos até hoje.

Devido à diminuição no número de projéteis disponíveis capazes de alterar sua rotação, os corpos maiores ainda não teriam atingido o equilíbrio colisional, e portanto sua rotação ainda seria a primordial. Harris também calculou qual seria esta rotação primordial, utilizando este mesmo modelo para um regime de acreção colisional.

Para modelar a acreção, as únicas mudanças incluídas neste modelo foram a redução do valor da velocidade de impacto e a alteração no cálculo do parâmetro de impacto médio das colisões, já que o desvio provocado pela gravidade do alvo passa a ser importante. Utilizando o resultado de Safronov e Zvjagina (1969), o valor médio do parâmetro de impacto é $l^2 = \frac{1}{2} r^2 \left(1 + \frac{v_e^2}{v^2} \right)$, sendo v_e a velocidade de escape do alvo. Fazendo esta

substituição, o resultado para a velocidade constante de rotação é

$$\frac{\omega}{\omega_s} = \frac{5}{2}(2-q) \left[\frac{1 + (v/v_e)^2}{3-q} \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

A partir deste resultado, pode ser encontrada a velocidade máxima de impacto que permite acreção, a velocidade na qual a rotação de equilíbrio corresponde ao limite de rotação de um corpo sem coesão. Este valor é

$$\frac{v}{v_e} = \frac{4}{25} \left[\frac{3-q}{(2-q)^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (3.15)$$

Que corresponde a aproximadamente $v/v_e = 2.4$, e que concorda com o valor obtido anteriormente em modelos de formação planetária.

A velocidade de rotação dada por (3.14) tem um valor muito semelhante ao valor de equilíbrio encontrado anteriormente para o regime de fragmentação. Desta forma, por este modelo não é possível diferenciar pela rotação corpos com rotação primordial daqueles cuja rotação foi determinada por colisões no regime de fragmentação.

Segundo Harris, os resultados de Davis (1979), que indicam uma resistência muito maior à fragmentação (e que correspondem à tendência dos resultados atuais) levariam a uma rotação de equilíbrio muito rápida, mas também implicaria que corpos maiores que 30Km não teriam atingido equilíbrio devido à falta de projéteis grandes o suficiente.

Capítulo 4

Simulações de evolução rotacional

Utilizamos o nosso modelo de fragmentação para realizar uma série de simulações de colisões em um regime semelhante ao usado para o modelo de Harris, de forma a verificar como os resultados se assemelham para a evolução rotacional. Realizamos estas simulações usando alvos compostos e alvos formados por apenas 1 fragmento, de forma a verificar as diferenças provocadas pela estrutura reacumulada na evolução rotacional. Foi observado um comportamento marcadamente diferente, com os alvos simples atingindo mais rapidamente variações maiores na sua rotação, chegando a uma população de equilíbrio próxima da obtida por Harris no regime de coesão.

4.1 Alvos compostos

Como o objetivo é realizar uma série de colisões com vários alvos, foi necessário limitar o número de fragmentos formando cada alvo, de forma a tornar o tempo consumido aceitável. Não apenas o tempo de processamento cresce com o número de elipsóides (aproximadamente com N^2), mas também aumenta o tempo de integração necessário para que todos os fragmentos atinjam um movimento coletivo de corpo rígido e aumenta muito o tempo gasto para a montagem dos alvos, como discutido mais adiante. Desta forma, foi escolhido que cada série de colisões utilizaria 10 alvos formados por 10 fragmentos, submetidos a uma série de 10 colisões, o que consumiu cerca de 1 mês de tempo de

processamento para cada série.

Cada alvo foi modelado como um conjunto de 10 elipsóides, com a forma seguindo o padrão para a razão de eixos principais, 1:0.7:0.5, e densidade média de $3g/cm^3$. Os tamanhos dos fragmentos foram escolhidos segundo a lei de potências (para as massas) usada por Harris, com um índice $q = 1.83$ (11/6). A lei de potências foi normalizada de forma que o segundo maior fragmento (m_2) tenha 1/10 da massa do maior (m_1):

$$n(m')dm' = n_C \frac{m'^{-q} dm'}{m_1^{1-q}} \quad (4.1)$$

Com

$$n_C := \int_{m_2}^{m_1} \frac{m'^{-q} dm'}{m_1^{1-q}} = \frac{m_1^{1-q} - m_2^{1-q}}{(1-q)m_1^{1-q}} = 1 - \frac{m_2^{1-q}}{(1-q)m_1^{1-q}}$$

Foram então selecionados os maiores fragmentos desta lei de potências, com massas dadas por

$$m_i := \left(m_{i-1}^{1-q} - \frac{1-q}{n_C} m_1^{1-q} \right)^{1/(1-q)}$$

Cada alvo foi montado como descrito no capítulo 2, com os fragmentos sendo inicialmente dispostos de forma aleatória, próximos entre si, com o maior no centro, e integrando este sistema com uma pequena velocidade de rotação e alta dissipação, para que a acumulação e acomodação dos fragmentos seja mais rápida. Ainda assim, a acomodação inicial dos fragmentos consome muito tempo de processamento, principalmente para os alvos menores. Como vários fragmentos acabavam por escapar, muitas integrações para gerar os alvos tinham que ser refeitas, de forma a obter alvos com 10 fragmentos; foi observado que a melhor eficiência era obtida iniciando com 15 fragmentos. Ainda assim, foram necessárias cerca de 10 integrações para obter cada alvo. Por esta baixa eficiência e pelo longo tempo necessário para que os fragmentos se acomodassem, a geração dos alvos consumiu em geral o dobro do tempo necessário para a realização de todas as 10 colisões subsequentes. Os alvos obtidos são mostrados na figura 4.1. Os semi-eixos maiores equivalentes ali listados são de um corpo de mesma massa que a soma das massas

dos fragmentos e mesma forma e densidade média dos fragmentos. Cada integração para gerar os alvos se estendeu por cerca de $1 - 2.5 \times 10^6 s$, consumindo cerca de 2-5 horas em um Pentium 4 de 1GHz.

Estes alvos então foram submetidos a uma série de 10 colisões com projéteis formados por um único fragmento (com a mesma forma dos que compõem o alvo), provenientes de direções distribuídas uniformemente de forma aleatória, com uma velocidade fixa (5Km/s) e parâmetro de impacto fixo, igual ao valor médio usado por Harris. Para a escolha dos tamanhos dos projéteis, eles foram escolhidos na primeira série aleatoriamente de uma população de 5000 corpos distribuídos segundo uma lei de potências para sua massa da mesma forma que a usada para os fragmentos de cada alvo, para obter uma boa amostragem inicial de energias. Na segunda série foi gerada uma distribuição de 10 fragmentos segundo esta lei de potência e estes foram escolhidos sequencialmente. O maior fragmento foi escolhido de forma a corresponder a uma determinada energia específica para um impacto com o maior alvo. Foram realizadas duas séries independentes de colisões, partindo dos mesmos alvos, mas em regimes diferentes de energias específicas, uma a $2 \times 10^9 - 3 \times 10^{10} erg/g$ e a outra a $3 \times 10^6 - 4 \times 10^7 erg/g$.

Cada colisão foi integrada até que os fragmentos estivessem próximos de um movimento coletivo de corpo rígido. Devido à limitação de tempo de processamento, não era possível esperar até que os fragmentos estivessem completamente acomodados; o final de cada integração foi tomado quando os fragmentos apresentavam baixa velocidade relativa, e por esta razão o critério usado no programa para identificar os corpos reacumulados foi o mais abrangente. Em geral, foi necessário um tempo de integração de $1 - 2 \times 10^4 s$ para cada colisão, consumindo cerca de 0.5h de processamento. Após cada colisão eram identificados os fragmentos com movimento de corpo rígido, sendo os restantes considerados ejetados e sendo eliminados antes da próxima colisão. Em nenhuma das colisões realizadas houve acreção do projétil, como já era esperado pela alta velocidade usada. Em muitas das colisões foram gerados satélites. Como este modelo só utiliza o monopolo gravitacional para os fragmentos, não é muito adequado para analisar a estabilidade dos satélites em longos períodos. Os satélites foram então considerados como fragmentos

ejetados, sendo removidos antes da próxima colisão. Nos casos em que não haviam corpos compostos após a colisão, o maior fragmento foi tomado como alvo para a próxima colisão, e os restantes eram descartados. Ao final de cada colisão foram então calculados para os remanescentes dos alvos o seu período (a mediana dos períodos de seus fragmentos), raio equivalente e o coeficiente α usado por Harris, que mede o decréscimo do raio equivalente (em relação ao raio equivalente antes da primeira colisão): $\alpha = \frac{r_i - r}{r_i}$.

4.2 Resultados

As figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam os resultados de todas as colisões no espaço de velocidade de rotação e raio, da mesma forma apresentada por Harris, para a trajetória seguida por cada alvo e para a distribuição dos 10 alvos após cada colisão. No trabalho de Harris, as velocidades de rotação eram inversamente proporcionais a $\sqrt{\alpha}$, e α era tomado como constante. Como neste trabalho α não é fixo, foram também feitos gráficos semelhantes aos destas figuras, mas multiplicando as velocidades por $\sqrt{\alpha}$, de forma a eliminar a sua dependência em α . Como foi observado que os resultados com ou sem esta correção eram muito semelhantes, ela foi descartada. As figuras 4.6 e 4.7 mostram os valores de α e da energia específica para cada colisão.

Na primeira série de colisões, todos os alvos rapidamente perderam fragmentos, e a partir da quarta colisão já não haviam quaisquer corpos reacumulados restantes. Desta forma, seus resultados são mais úteis para medidas da fragmentação do que para observar a evolução rotacional. As distribuições finais de rotação são também semelhantes às obtidas para alvos simples, discutidas mais adiante. Na segunda, nenhum dos remanescentes tem apenas um fragmento, de forma que seus resultados são representativos para corpos reacumulados. Em particular, é notável a eficiência de colisões para alterar a velocidade de rotação de todo o corpo reacumulado, mesmo a baixas energias específicas.

Nas trajetórias seguidas pelos alvos, vê-se que eles atingiram rapidamente a sua rotação final, nas primeiras duas ou três colisões; as colisões seguintes alteraram pouco a rotação. No caso das séries com baixas energias específicas, a rotação não variou muito após as

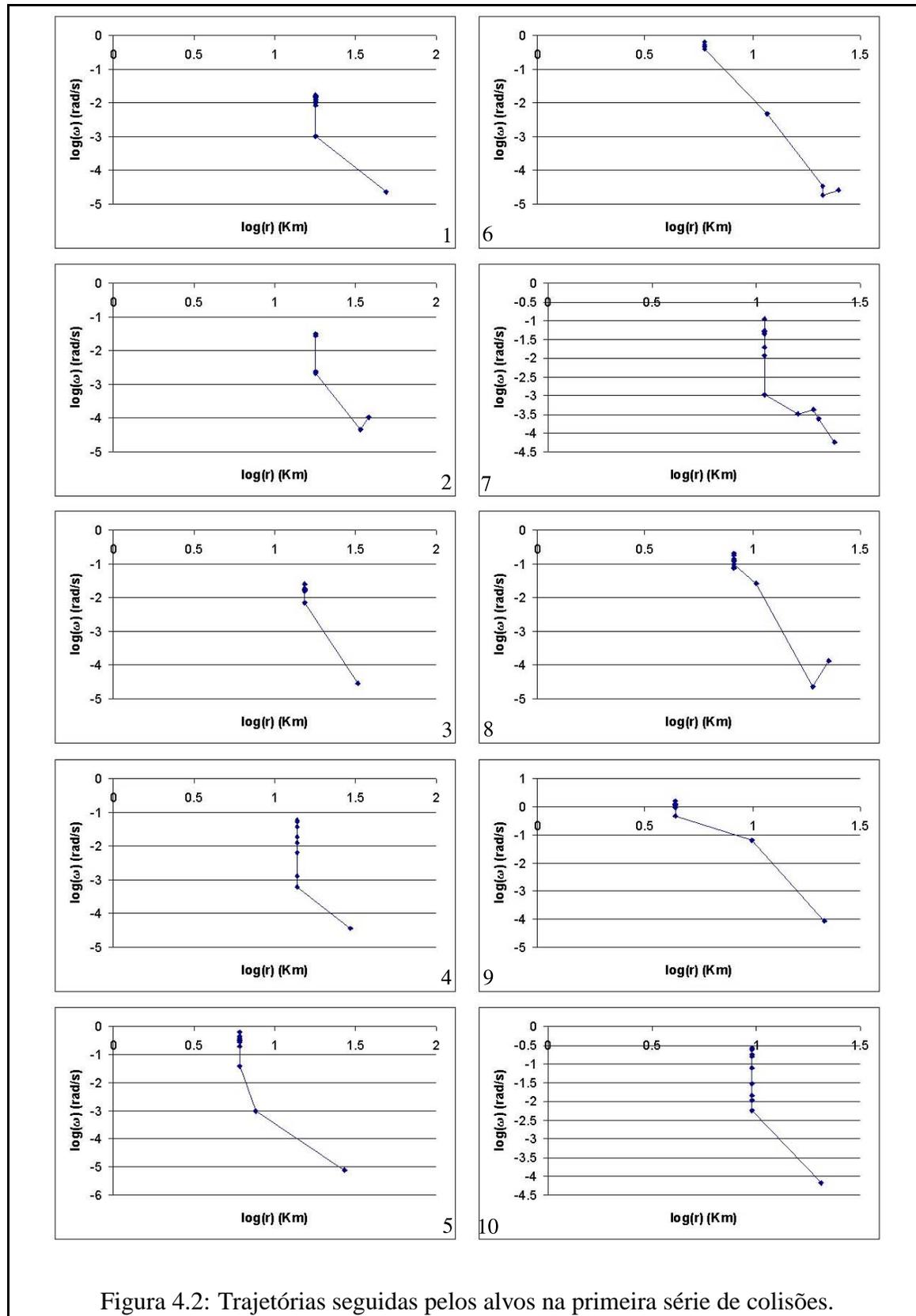


Figura 4.2: Trajetórias seguidas pelos alvos na primeira série de colisões.

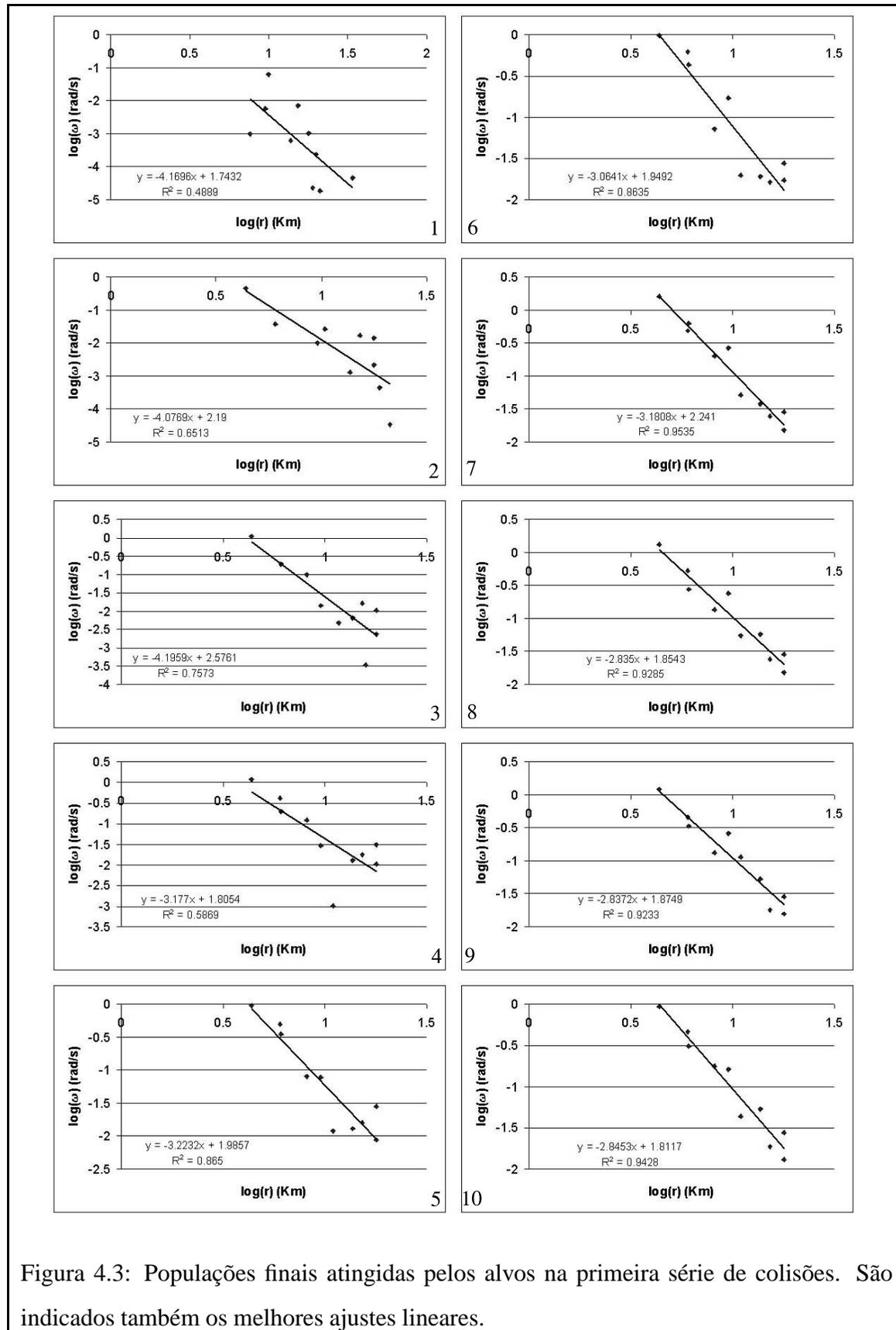


Figura 4.3: Populações finais atingidas pelos alvos na primeira série de colisões. São indicados também os melhores ajustes lineares.

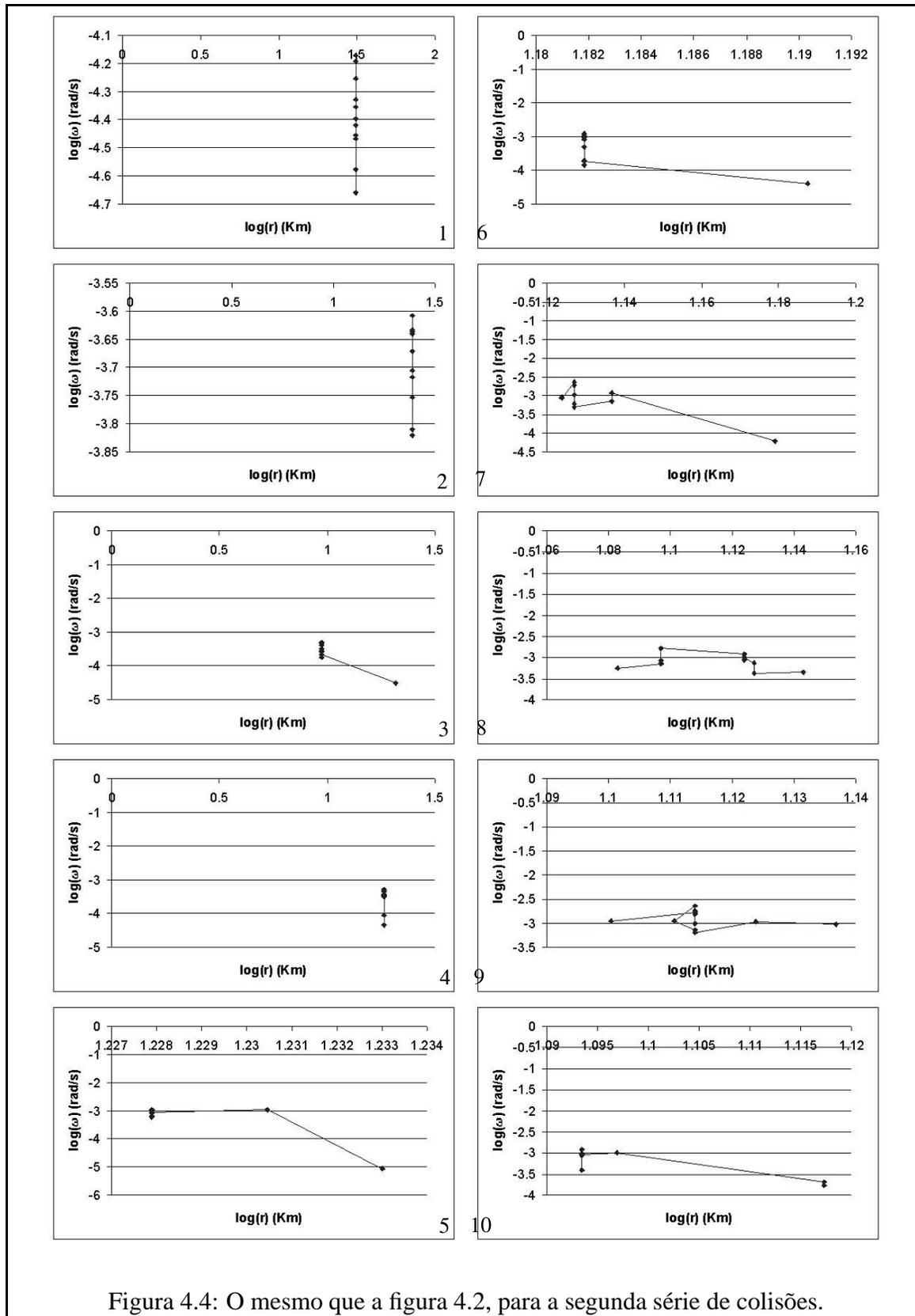


Figura 4.4: O mesmo que a figura 4.2, para a segunda série de colisões.

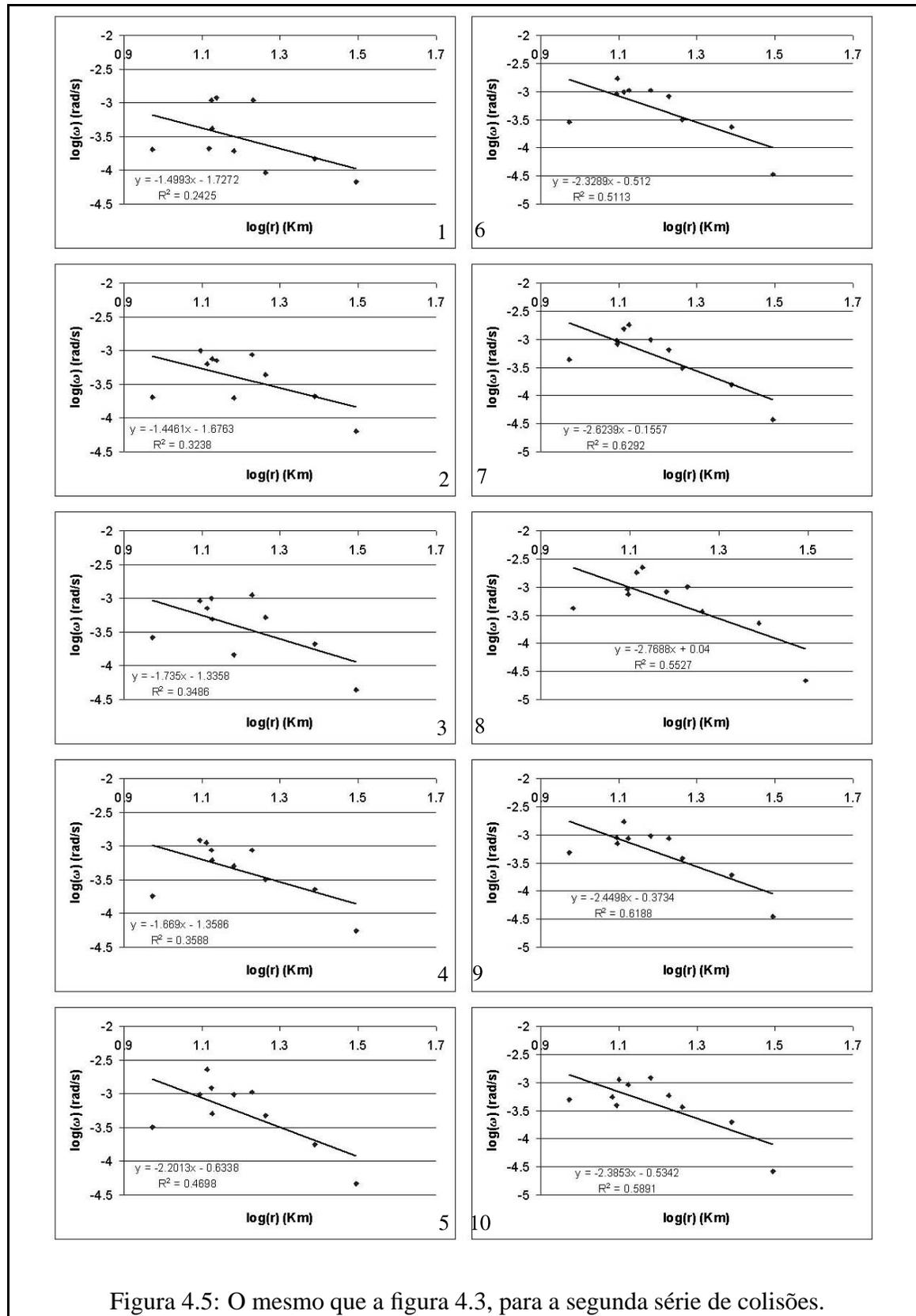


Figura 4.5: O mesmo que a figura 4.3, para a segunda série de colisões.

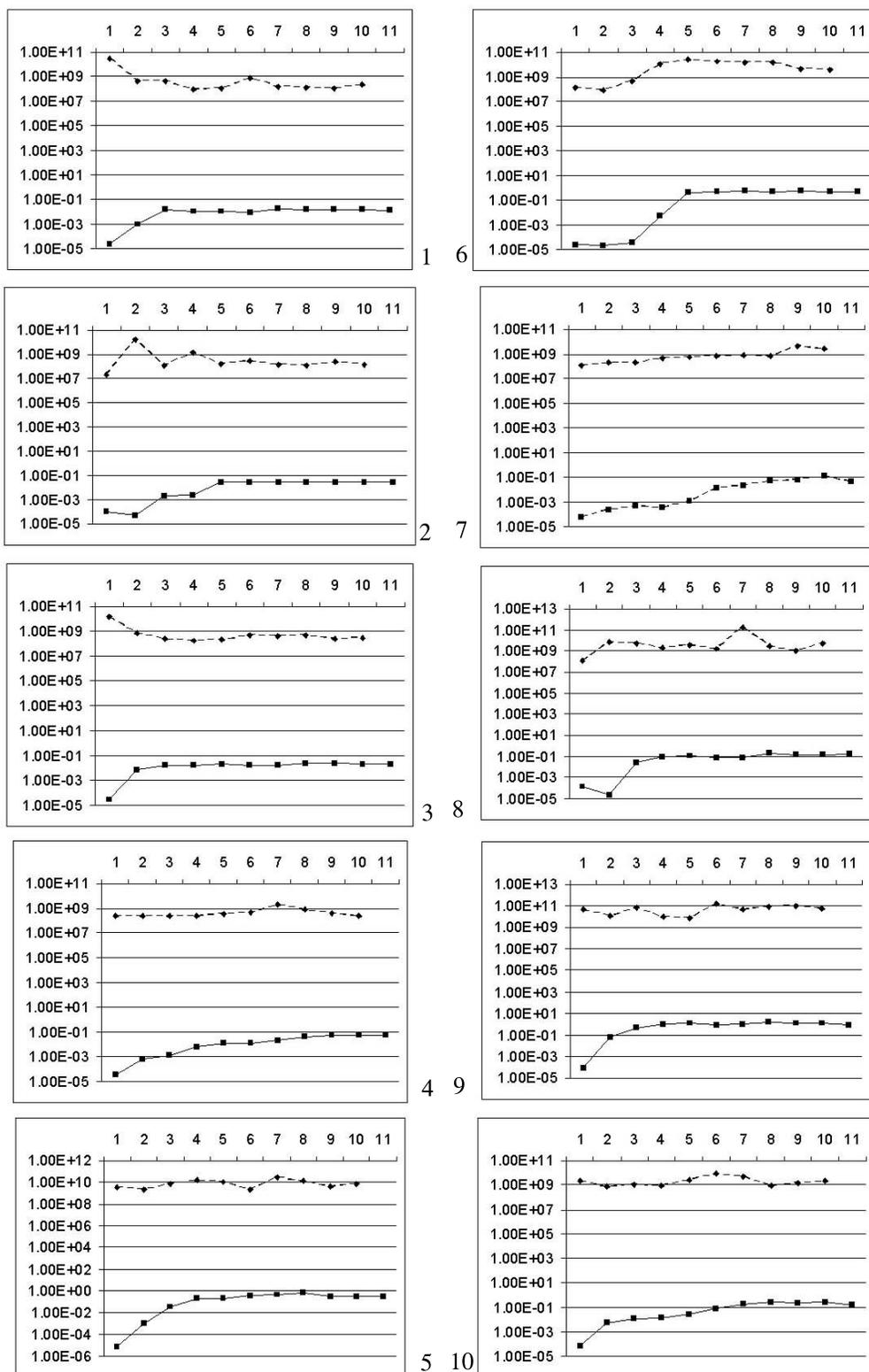


Figura 4.6: As trajetórias seguidas para o fator de redução no raio para cada alvo (linhas cheias) e as energias específicas para cada colisão (linhas tracejadas).

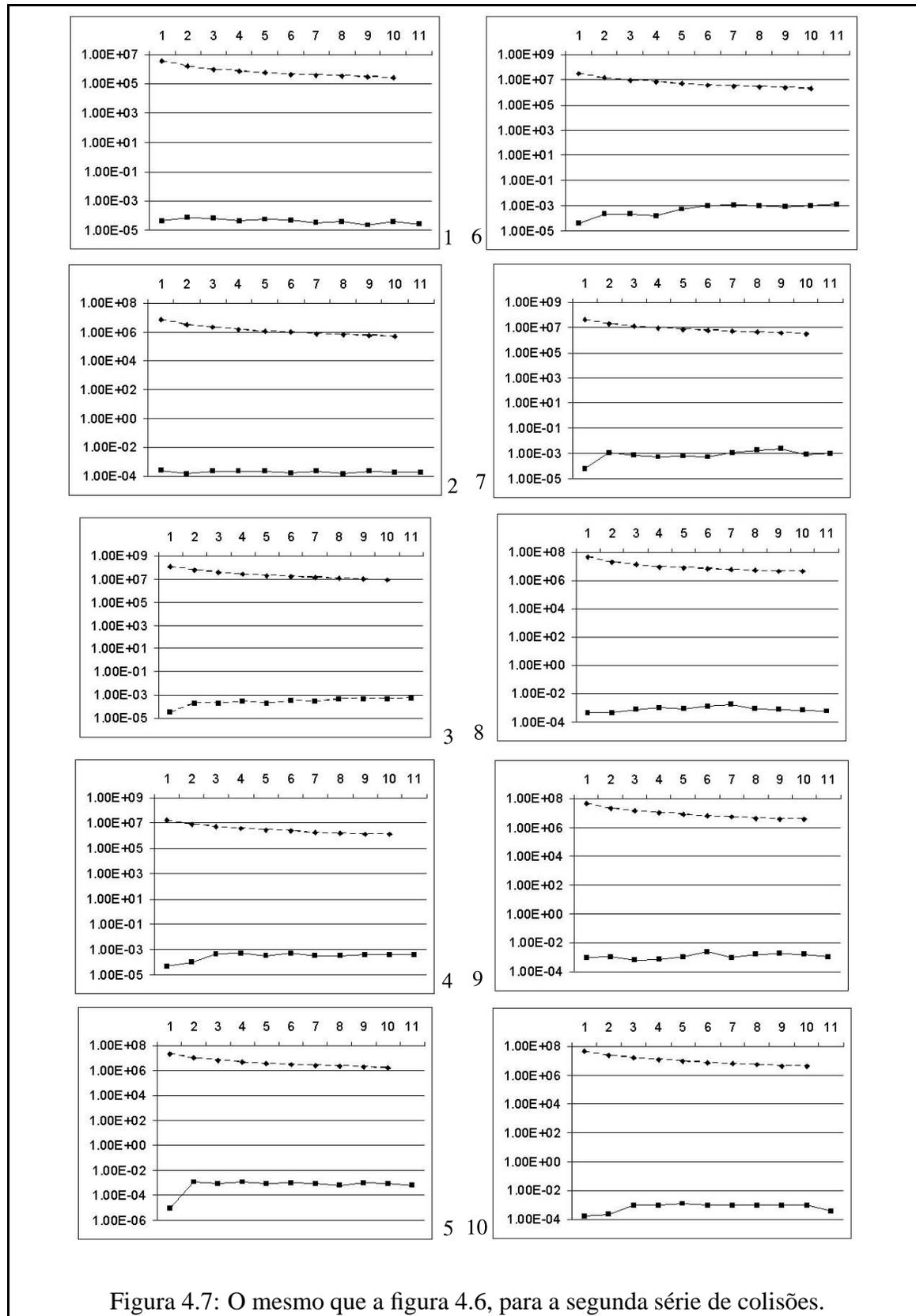


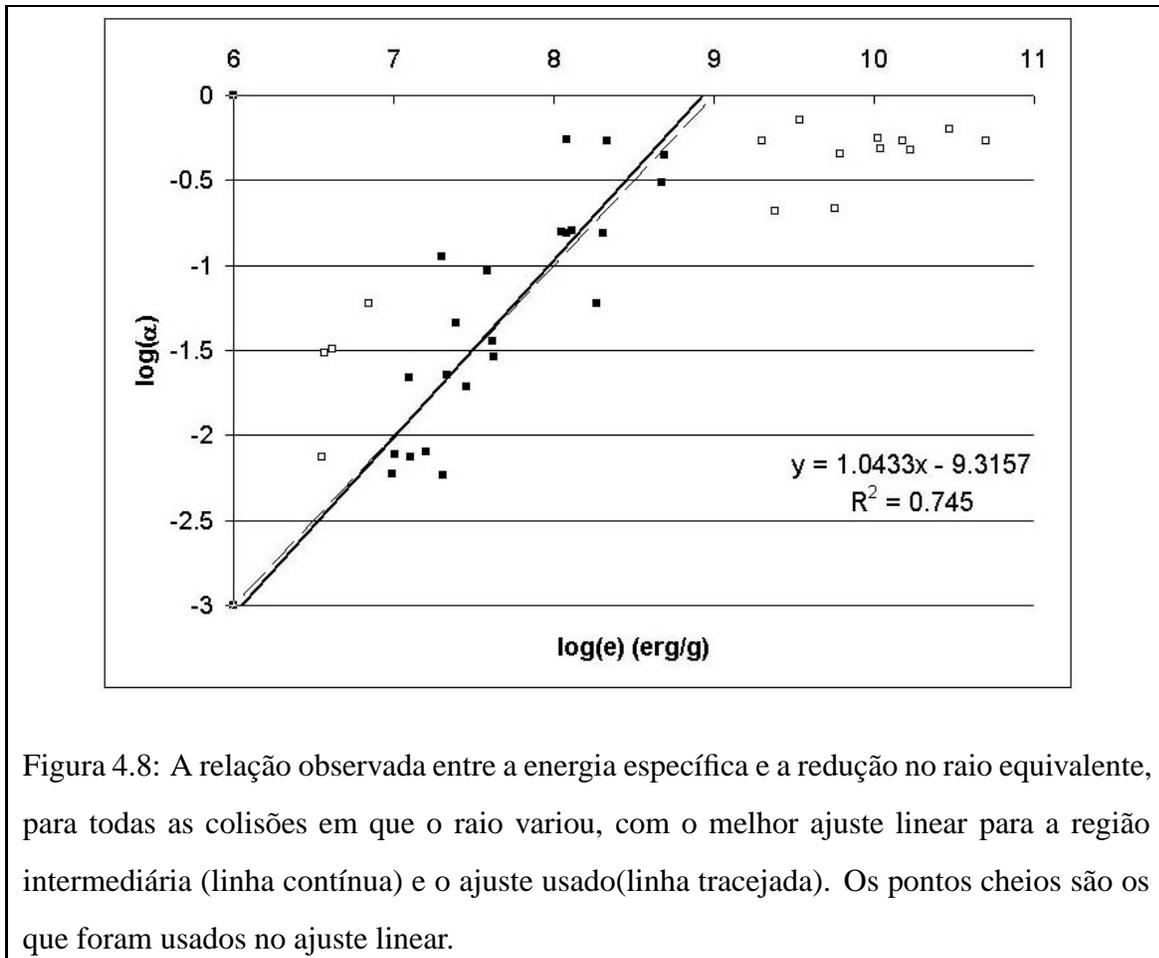
Figura 4.7: O mesmo que a figura 4.6, para a segunda série de colisões.

primeiras colisões mas foram observadas reduções no número de fragmentos.

Para a distribuição da rotação, nota-se que para altas energias específicas estas evoluem rapidamente para uma reta, e que os efeitos das colisões seguintes são continuar aumentando as velocidades, mas de forma a diminuir a inclinação da reta, chegando a um valor final em torno de -2.8 . Deve-se notar que estes resultados são mais indicativos do comportamento de fragmentos individuais, que foi analisado em mais detalhes separadamente, e que a inclinação variar monotonamente indica que o equilíbrio ainda não foi atingido. Para as colisões com baixas energias específicas, embora haja uma tendência a rotação mais rápida para corpos menores esta correlação não é tão forte, como pode ser visto pela maior dispersão em torno da melhor reta. A inclinação não tem a evolução monótona observada no regime de alta energia, oscilando ao longo das colisões em torno de -2.3 , indicando que este seria o valor de equilíbrio.

Na figura 4.8 estão os valores de α e da energia específica de todas as colisões nas quais houve variação de tamanho nos alvos. Pode-se observar que há uma região intermediária, destacada das bordas, onde há uma correlação mais forte entre α e e . Nesta região foi feito um ajuste linear para $\log(\alpha)$ e $\log(e)$, que tem melhor inclinação 1.04. Deve ser considerado, no entanto que o ajuste não é muito preciso ($R^2 = 0.75$), e que foi obtido de pequeno número de pontos e com baixa resolução para a fragmentação de cada alvo. Muitos dos pontos neste gráfico correspondem a alvos que já perderam fragmentos, e o próprio caráter ruidoso é esperado deste tipo de dado, pela possibilidade de efeitos de geometrias específicas diferentes. Desta forma, como o coeficiente angular obtido foi 1.04, usamos como resultado um ajuste com coeficiente 1, que corresponde a α proporcional a e , resultando em um coeficiente linear -8.98 (e uma queda na qualidade do ajuste para apenas $R^2 = 0.74$). A correlação obtida, usada em outras simulações descritas adiante, foi então $\alpha = 10^{-9}e(g/erg)$.

Outro resultado que pode ser observado na figura 4.5 é a presença de alguns corpos com rotação muito rápida, chegando a um limite em torno de $1.15h$ ($10^{-3}rad/s$). Como indicado anteriormente, o limite para corpos sem coesão com esta densidade é em torno de 0.95 hora. É uma tendência geral de todos os resultados obtidos com este modelo



(não apenas os destas simulações; também nos discutidos anteriormente para a formação de famílias) rotações muito rápidas, o que pode ser devido a momentos de inércia muito baixos. Estes períodos muito curtos para corpos reacumulados se devem também em parte a terem sido medidos pelas velocidades de rotação dos fragmentos, e foi observado que a acomodação das velocidades de rotação leva mais tempo que a do movimento de translação relativo. Desta forma, estas altas velocidades também expressam o resultado de a acomodação não ter sido completa. Na figura 4.3 são observados muitos corpos com rotação muito mais rápida que este limite, mas neste caso os remanescentes ao final das colisões são fragmentos individuais.

4.3 Alvos simples

Ao utilizar alvos simples, as simulações podem ser realizadas com um número muito maior de alvos e colisões para cada alvo. Assim, foram realizadas colisões com 20 alvos, de 2m a 1024Km (semi-eixo maior), com a mesma densidade e forma utilizados anteriormente. Cada alvo foi submetido a séries de 500 colisões com projéteis à mesma velocidade (5Km/s), parâmetro de impacto (metade do raio) e direções uniformemente distribuídas, da mesma forma que para os alvos reacumulados. As energias específicas foram escolhidas na faixa intermediária observada nas colisões com alvos compostos. Os projéteis usados foram os 500 maiores de uma distribuição em lei de potências da mesma forma usada anteriormente.

Como cada alvo é formado por apenas um fragmento, não há fragmentação. Foi realizada então uma nova série de colisões, simulando fragmentação ao incluir artificialmente uma redução no tamanho do alvo após cada colisão. Esta redução é calculada com base na correlação entre a energia específica e e α , observada nas simulações com alvos compostos. Esta foi implementada como $\alpha = 10^{-9}e(g/erg)$ para $\alpha < 0.5$, e um valor constante $\alpha = 0.5$ para energias maiores, o que reproduz o comportamento observado nas simulações descritas anteriormente para energias específicas intermediárias e altas. Esta forma de fragmentação, que não altera a velocidade de rotação, corresponderia no mo-

delo de Harris ao caso em que a perda de momento angular é compensada pela perda de momento de inércia, mantendo a rotação constante.

Adicionalmente, como para alvos simples o tempo para realização destas séries de colisões é bastante reduzido, foram realizadas outras séries variando alguns dos parâmetros utilizados: número de colisões, velocidade inicial de rotação, passo de integração, ordenação de tamanho dos projéteis (ordenados por tamanho decrescente ou de forma aleatória), faixa de valores para a energia específica e algumas repetições dos mesmos parâmetros, de forma a verificar se os resultados dependiam dos valores aleatórios usados para a direção do impacto. Para as simulações com alvos compostos estas verificações foram muito limitadas pelo longo tempo de processamento necessário, sendo realizadas apenas de forma parcial.

4.4 Resultados

Nestas simulações, o uso de alvos monolíticos sem que a fragmentação dependa do raio implica que está sendo modelado apenas o regime de coesão, uma vez que não há algum mecanismo que permita alguma mudança de regime colisional. Assim, segundo o modelo de Harris este regime teria uma população de equilíbrio seguindo uma reta de inclinação -1. As figuras 4.9 e 4.10 mostram as populações finais para as simulações com e sem variação no raio. É bastante notável que em ambos os casos as populações se adequam bastante bem a uma reta, embora não a mesma prevista por Harris (inclinação -1). Estes gráficos são para uma população com uma rotação inicial de cerca de 9 horas de período, (10^{-4}) radianos/segundo, e o resultado obtido para uma rotação inicial 100 vezes mais rápida foi observado como indistinguível. Como pode ser observado ao comparar as populações após diferentes números de colisões, observa-se que a distribuição apresentada ao final é atingida de forma muito rápida. É importante notar que como os alvos apresentam em geral rotação complexa (como é esperado para fragmentos monolíticos após colisões) eles têm velocidade de rotação variável; este não é o caso, no entanto, dos alvos reacumulados tratados anteriormente.

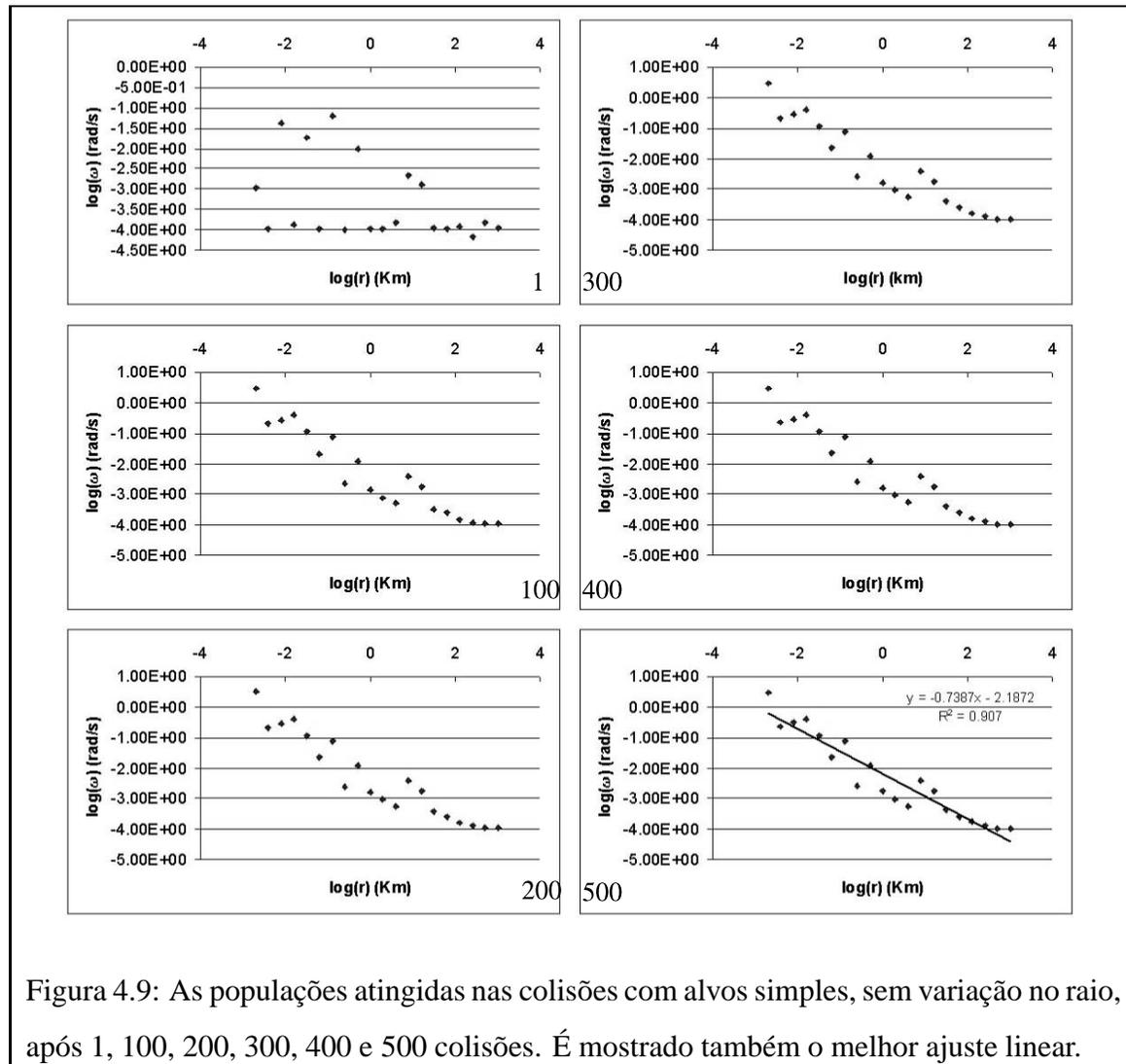


Figura 4.9: As populações atingidas nas colisões com alvos simples, sem variação no raio, após 1, 100, 200, 300, 400 e 500 colisões. É mostrado também o melhor ajuste linear.

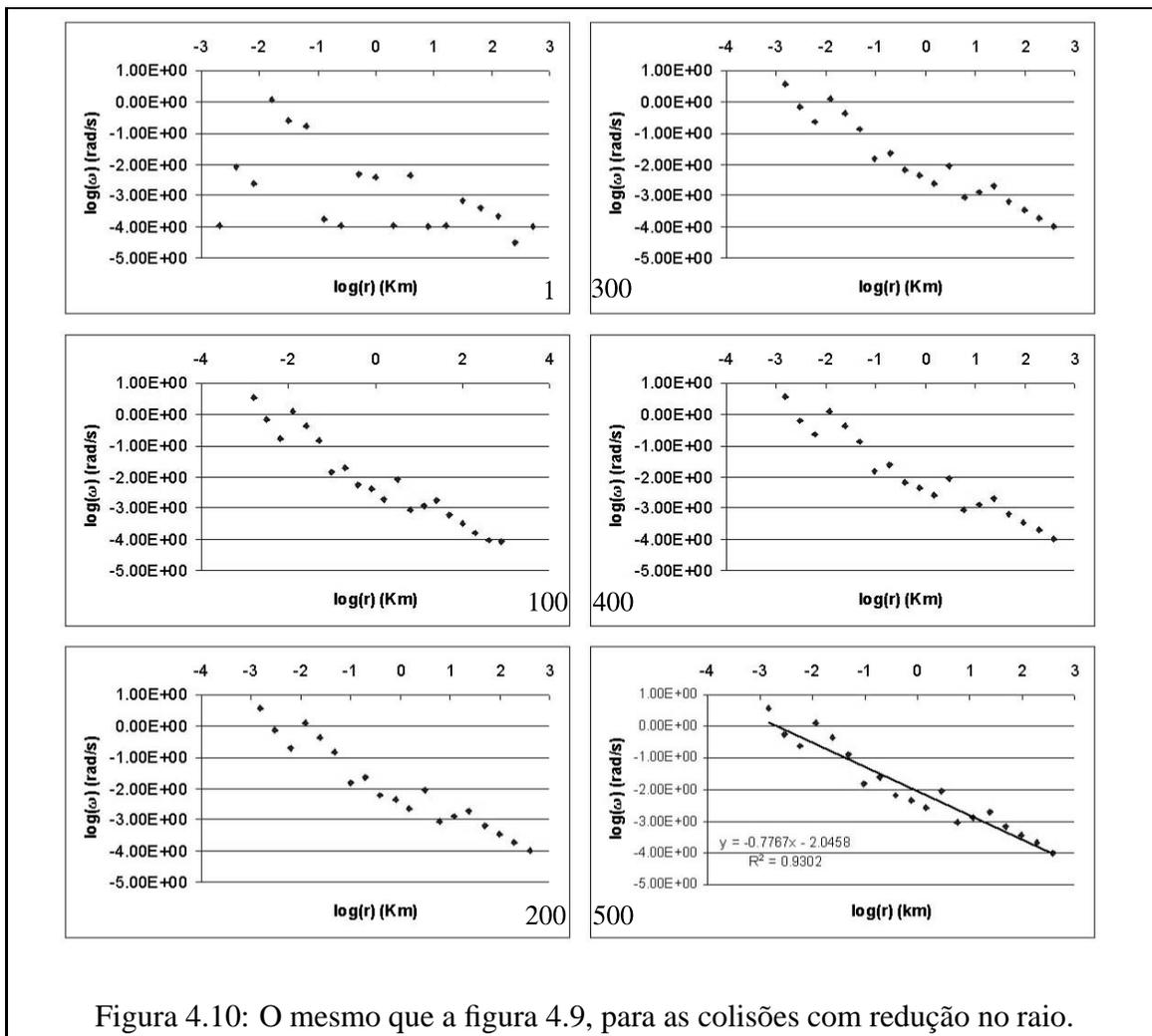


Figura 4.10: O mesmo que a figura 4.9, para as colisões com redução no raio.

As repetições das simulações variando parâmetros para verificar a consistência das simulações mostraram que os resultados são muito semelhantes para diferentes escolhas de: passos de integração (até dezenas de vezes maior), número de colisões (dez vezes menor), tamanho dos projéteis (um fator de 10, maiores e menores) e velocidade inicial de rotação (100 vezes maior).

O resultado geral mais marcante é a distribuição se tornar bastante próxima de uma reta. Foi observado ainda que a evolução até esta reta é bastante rápida, ocorrendo nas primeiras 50 colisões das 500 realizadas. Como esta rápida convergência ocorreu tanto para as simulações com os projéteis em ordem decrescente de tamanho como nas simulações com ordem aleatória dos projéteis, este resultado implica que é atingido o equilíbrio para esta população, e não que a distribuição deixa de variar rapidamente pela redução no tamanho dos projéteis. Esta independência da ordem também indica que ao usar um grande número de projéteis a população de equilíbrio não é fortemente dependente do regime de energias específicas das colisões. Também coerente com esta conclusão foi a constatação de que ao usar um menor número de projéteis maiores os resultados obtidos foram muito semelhantes. As inclinações obtidas foram em torno de -0.75 , enquanto o valor previsto por Harris é -1 .

Ao comparar os resultados obtidos para as simulações com e sem redução no raio, foram observados resultados muito semelhantes, mesmo com a redução final no raio sendo ligeiramente superior ao limite catstrófico ($m/m_i = 0.4$). Este resultado pode ser visto simplesmente como uma consequência da população de equilíbrio estar sempre em torno de uma faixa estreita, mesmo com uma variação de 6 ordens de grandeza no raio, e de a convergência para esta população ser marcadamente rápida. O efeito de variar o raio é simplesmente deslocar os alvos horizontalmente para fora da reta, mas a rápida convergência faz que eles atinjam rapidamente a velocidade correspondente ao seu novo raio. Ou seja, apenas o raio determina a velocidade de rotação.

É importante notar que a forma como a redução no raio foi implementada impõe um limite para a redução para cada colisão, pois a população que colide com cada alvo é determinada pelo seu tamanho inicial. O limite para α por colisão foi observado em torno

de 0.065. Acima deste valor, o raio do alvo é reduzido muito rapidamente e mesmo usando projéteis ordenados por tamanho esta redução no alvo em relação à redução no raio do projétil é muito rápida, de forma que o alvo diminui de tamanho quase exponencialmente a cada colisão, chegando a tamanhos excessivamente pequenos após as primeiras colisões. Foi usado então um valor de 0.05, que resultou no final em uma redução acumulada em torno de 0.2-0.3. Esta limitação expressa simplesmente o fato de que esta lei para a fragmentação foi baseada em eventos que removem uma pequena fração do alvo.

4.5 Conclusões

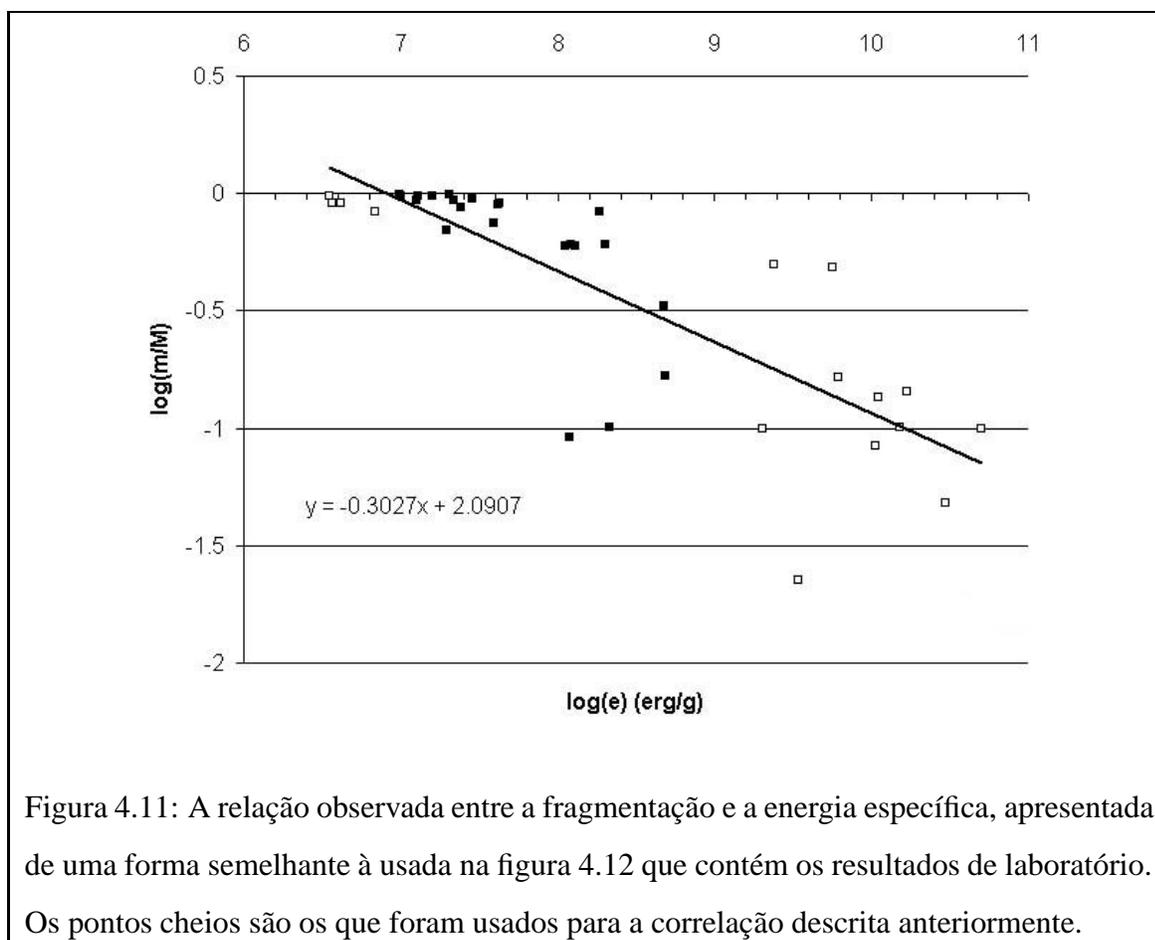
As simulações descritas neste capítulo se propunham a verificar de forma preliminar como o nosso modelo reproduz a evolução rotacional de uma população de asteróides e analisar as diferenças de comportamento de alvos monolíticos e reacumulados. Mesmo sendo esta apenas uma primeira e simples análise, foi possível observar um comportamento marcadamente diferente dos alvos reacumulados e alvos monolíticos. Os alvos monolíticos apresentaram uma distribuição final de rotação em função do tamanho pouco espalhada em torno de uma reta, para uma variação de tamanho de um fator de 10^6 . Já os corpos reacumulados apresentam uma distribuição mais espalhada que os alvos monolíticos e uma maior inclinação. Um espalhamento maior já era esperado para os corpos reacumulados, pois a sua forma irregular, diferente para cada alvo, e a presença de fragmentos grandes e em um pequeno número faz com que haja a possibilidade de uma maior variedade nos resultados das colisões, de acordo com a sua geometria.

Embora aqui tenha sido usada uma modelagem bastante simplificada, os dois regimes distintos observados (alvos monolíticos e reacumulados) podem ser tomados como representativos dos regimes de coesão e gravitacional, respectivamente. Caso se considere que corpos monolíticos dominam a população de asteróides em pequenos tamanhos, e corpos reacumulados dominam a população a partir deste valor, pode se fazer com que os dois regimes aqui observados se encontrem. Para que as populações coincidam nesta transição entre corpos reacumulados e corpos monolíticos, ela deveria ocorrer a um tamanho em

torno de 10Km. A grande dispersão observada nos corpos reacumulados faz com que este valor não seja muito preciso, e que a transição não precise ser súbita.

Apesar de alguns corpos reacumulados apresentarem rotação ligeiramente alta, como indicado anteriormente este pode ser o resultado da medida de velocidade ser feita em corpos não completamente acomodados (nos quais a rotação demora mais para se ajustar que a translação) e da tendência sistemática deste modelo de gerar altas velocidades de rotação. Ainda assim, foi observado que a rotação dos corpos reacumulados se restringe a períodos maiores que 1.15h, como esperado para corpos deste tipo. A maior inclinação apresentada na distribuição dos corpos reacumulados parece ser o resultado dos mecanismos de drenagem e espalhamento do momento angular, embora o pequeno número de corpos usado faça com que esta conclusão seja ainda prematura. Deve ser notado que as distribuições finais observadas nos alvos reacumulados da primeira série, que usava altas energias específicas não é representativa de resultados para corpos reacumulados, porque todos os alvos haviam sido reduzidos a um único fragmento. Por outro lado, os resultados obtidos desta série são bastante coerentes com os resultados observados nos alvos monolíticos.

Ainda chama a atenção a razoável correlação observada para energias intermediárias entre o coeficiente de redução no raio α e a energia específica da colisão, mostrando os dois sendo proporcionais. Esta correlação prevê que colisões catastróficas ocorreriam a uma densidade de energia de 0.2×10^9 (erg/g). Não é o objetivo destas simulações analisar a resistência destes alvos à fragmentação e sua variação com o tamanho, embora possa ser notado que este valor de energia para fragmentação seja compatível com valores de dispersão obtidos recentemente de modelos hidrodinâmicos para a faixa de tamanhos dos alvos usados (Holsapple et al. 2002). Pode se observar também que a correlação encontrada entre o remanescente da colisão (massa relativa à inicial) e a energia específica indicaria uma resistência muito maior que a de laboratório, como pode ser visto nas figuras 4.11 e 4.12.



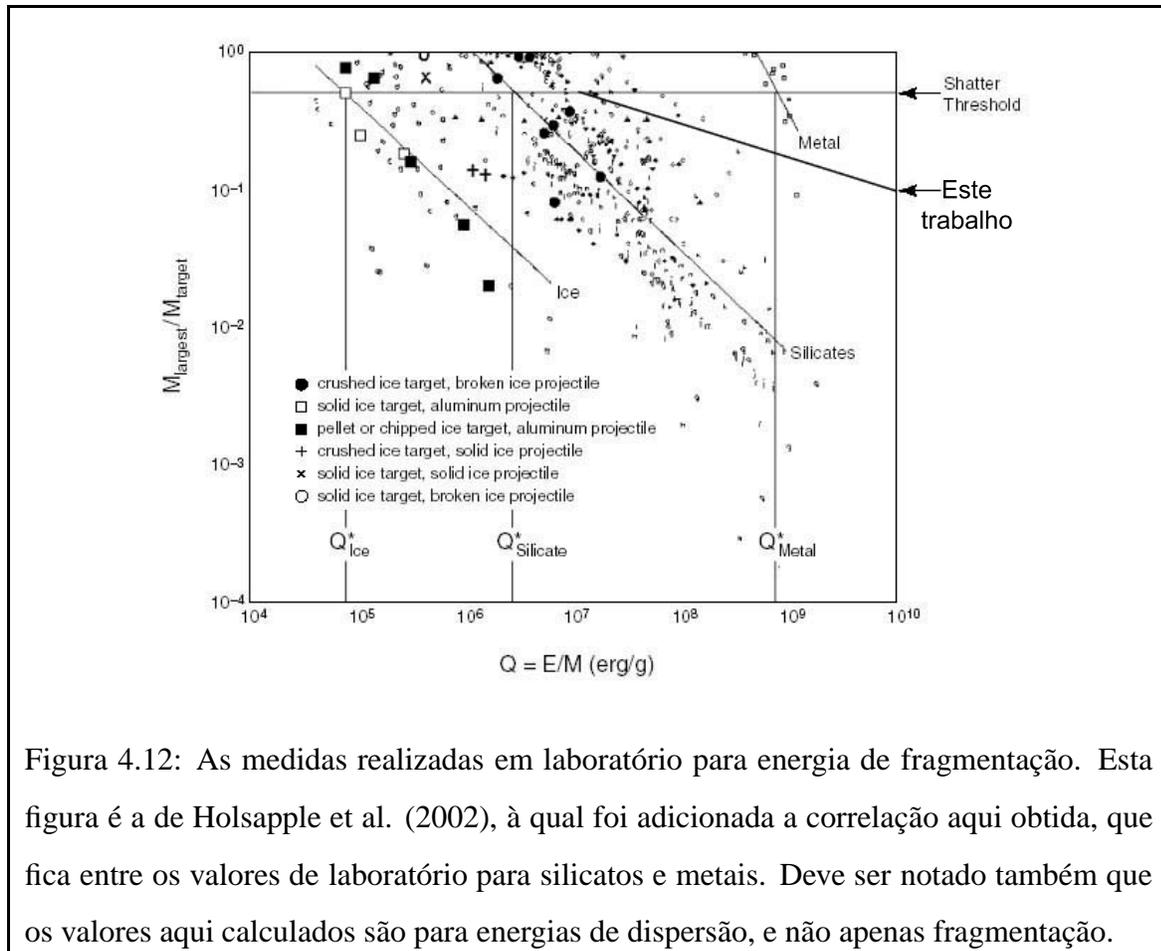


Figura 4.12: As medidas realizadas em laboratório para energia de fragmentação. Esta figura é a de Holsapple et al. (2002), à qual foi adicionada a correlação aqui obtida, que fica entre os valores de laboratório para silicatos e metais. Deve ser notado também que os valores aqui calculados são para energias de dispersão, e não apenas fragmentação.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

A partir da constatação recente de que corpos reacumulados são uma parte importante da população do Cinturão de Asteróides, desenvolvemos nos últimos anos um modelo para simular a fragmentação colisional de corpos reacumulados. Apresentamos aqui o desenvolvimento e as primeiras aplicações do modelo de Elipsóides Interagentes à simulação de processos de fragmentação e evolução rotacional de asteróides reacumulados.

O modelo desenvolvido anteriormente foi aprimorado, com a correção de alguns erros de implementação que haviam sido observados, desenvolvimento de outros programas necessários a tarefas auxiliares, como identificação e preparação de alvos reacumulados, uma interface simples para a visualização das colisões sendo realizadas e tarefas comuns de processamento dos dados gerados nas integrações. Foi também realizada a inclusão de dissipação de energia e momento e a realização de simulações para a fragmentação por colisões de alta velocidade de possíveis progenitores de famílias de asteróides observadas. A inclusão da dissipação é importante para permitir baixas eficiências energéticas (como observado em laboratório e outros modelos de fragmentação), perda de momento e energia (que se devem ao escape de fragmentos pequenos não modelados e à dissipação de energia dentro do corpo) e a acomodação de fragmentos em uma acumulação em um corpo composto.

Os testes básicos realizados com o modelo e as simulações de fragmentação de progenitores de famílias mostraram que o modelo se comporta de forma adequada, concordando

com os resultados esperados e resultados de outras modelagens existentes (como SPH). Ainda assim, foi notado que são produzidas velocidades de rotação sistematicamente altas para os fragmentos individuais, o que parece ser o resultado do uso de momentos de inércia muito baixos, embora este tipo de tendência tenha sido observado também em modelagens SPH.

Com relação à performance, as duas implementações desenvolvidas para este modelo apresentam em geral tempos de integração semelhantes para níveis intermediários de precisão, usados nas aplicações já realizadas. Os tempos de integração, embora relativamente longos para a realização de séries de muitas colisões (consumindo de alguns minutos a um dia para cada evento individual) permitem o seu uso mesmo com processadores modestos, o que não seria possível com modelos hidrodinâmicos como o SPH de Benz e Asphaug.

Nas simulações de evolução rotacional destinadas a reproduzir o regime colisional utilizado no modelo analítico de Harris, observamos como resultado mais bem definido uma nítida diferença no comportamento de corpos reacumulados e monolíticos quando sujeitos às mesmas condições. Os corpos reacumulados apresentam um comportamento mais complexo, com uma maior dispersão em suas velocidades de rotação e uma limitação em sua velocidade de rotação bastante próxima ao limite de ruptura esperado para um corpo sem coesão. Os corpos monolíticos evoluem para uma população de equilíbrio com uma nítida concentração ao longo de uma lei de potência para a velocidade de rotação em função do tamanho, se mantendo por mais de 6 ordens de magnitude em tamanho, embora com uma inclinação menor que a prevista por Harris. Também apresentam uma grande dispersão de estados rotacionais, havendo muitos corpos com rotação complexa. Nos corpos reacumulados a rotação parece ser significativamente mais próxima de rotação simples, embora a limitação de tempo de integração não permita ainda dizer que sua rotação seja simples.

O comportamento notadamente distinto observado em corpos reacumulados e monolíticos é coerente com a esperada diferenciação entre os regimes de colisões dominados pela coesão do alvo e pela sua gravidade. As duas populações simuladas se encontrariam formando uma população contínua caso os corpos pequenos sejam predominantemente

monolíticos e os grandes predominantemente reacumulados, com uma transição em tamanhos em torno de 10Km - embora este valor não seja observado de forma muito precisa, devido ao grande espalhamento na população de corpos reacumulados.

O modelo de Elipsóides Interagentes está sendo desenvolvido de forma a incluir novos processos gradualmente, para permitir estudar a importância dos diferentes fenômenos modelados para o resultado das colisões. Deve ser notado que este modelo, em sua forma atual, não tem o objetivo de simular de forma precisa eventos específicos, mas sim de estudar as propriedades gerais dos processos de fragmentação. Apesar de ser ainda um modelo bastante simples e cuja exploração está apenas se iniciando, já observamos que ele reproduz resultados típicos observados em laboratório, na população de asteróides e em outros modelos numéricos.

Como trabalho futuro resta realizar mais séries de simulações com diferentes alvos, maior número de fragmentos e maior variedade de regimes colisionais, de forma a verificar melhor os resultados preliminares aqui observados. Há também fenômenos diferentes a serem analisados, como colisões com projéteis reacumulados, colisões no regime de acreção, interações de forças de maré e formação de satélites. Como futuros aprimoramentos do modelo podem ser citados a inclusão de formas diferentes de dissipação, forças de coesão entre os fragmentos e a possibilidade de fusão e fissão de fragmentos.

Referências

Asphaug, E. e Scheeres, D.J. 1999. Note: Deconstructing Castalia: evaluating a postimpact state. *Icarus* **139**, 383-386.

Asphaug, E., Ryan, E.V. e Zuber, M.T. 2002. Asteroid interiors. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of Arizona Press. pp. 463-484.

Benz, W. e Asphaug, E. 1994. Impact simulations with fracture. I. Methods and tests. *Icarus* **107**, 98-116.

Benz, W. e Asphaug, E. 1995. Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. *Computer Physics Communications* **87**, 253-265.

Benz, W. e Asphaug, E. 1999. Catastrophic disruptions revisited. *Icarus* **142**, 5-20.

Bottke Jr., W.F., Richardson, D.C., Michel, P. e Love, S.G. 1999. 1620 Geographos and 433 Eros: shaped by planetary tides?. *The Astronomical Journal* **117**, 1921-1928.

Britt, D.T., Yeomans, D., Housen, K., Consolmagno, G. 2002. Asteroid density, porosity, and structure. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of Arizona Press. pp. 485-500.

Burns, J.A. e Safronov, V.S. 1973. Asteroid nutation angles. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **165**, 403-411.

Campo-Bagatin, A. e Petit, J.-M. 2001. How many rubble-piles are in the Asteroid Belt? *Icarus* **149**, 198-209.

Cellino, A., Zappalà, V., Davis, D.R., Farinella, P. e Paolicchi, P. 1990. Asteroid collisional evolution. I. Angular momentum splash: despinning asteroids through catastrophic collisions. *Icarus* **87**, 391-402.

Cellino, A., Michel, P., Tanga, P. e Zappalà, V. 1999. The velocity-size relationship for members of asteroid families and implications for the physics of catastrophic collisions. *Icarus* **141**, 79-95.

Chapman, C.R. 1978. Asteroid collisions, craters, regolith and lifetimes. Em *Asteroids: an exploration assessment*, eds. D. Morrison e W.C. Wells. NASA Conf. Publ. 2053. pp. 145-160.

Davis, D.R., Chapman, C.R., Greenberg, R., Weidenschilling, S.J. e Harris, A.W. 1979. Collisional evolution of asteroids: populations, rotations and velocities. Em *Asteroids*, ed. Tom Gehrels. Tucson: University of Arizona Press. pp. 528-557.

Davis, D.R., Weidenschilling, S.J., Farinella, P., Paolicchi, P. e Binzel, R.P. 1989. Asteroid collisional evolution: effects on sizes and spins. Em *Asteroids II*, eds. Richard P. Binzel, Tom Gehrels e Mildred Shapley Matthews. Tucson: University of Arizona Press. pp. 805-826.

Davis, D.R. e Ryan, E.V. 1990. On collisional disruption: experimental results and scaling laws. *Icarus* **83**, 156-182.

Davis, D.R., Ryan, E.V. e Hartmann, W.K. 1991. Impact experiments 3: Catastrophic fragmentation of aggregate targets and relation to asteroids. *Icarus* **94**, 283-298.

Davis, D.R., Durda, D.D., Marzari, F., Campo-Bagatin, A. e Gil-Huton, R. 2002. Collisional evolution of small-body populations. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of Arizona Press. pp. 545-558.

Dermott, S.F., Harris, A.W. e Murray, C.D., 1984. Asteroid Rotation Rates. *Icarus* **57**, 14-34.

Dobrovolskis, A.R. e Burns, J.A. 1984. Angular momentum drain: a mechanism for despinning asteroids. *Icarus* **57**, 464-476.

Dohnanyi, J.S. 1969. Collisional model of asteroids and their debris. *Journal of Geophysical Research* **74**, 2531-2254.

Dohnanyi, S.J. 1976. Sources of interplanetary dust: asteroids. Em *Interplanetary dust and zodiacal light*, eds. H. Elasser e H. Fechtig. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.

Durda, D.D., Greenberg, R. e Jedicke, R. 1998. Collisional models and scaling laws: a new interpretation of the shape of the Main-Belt asteroid size distribution. *Icarus* **135**, 431-440.

Efroimsky, M. e Lazzarin, A. 2000. Inelastic dissipation in wobbling asteroids and comets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **311**, 269-278.

- Efroimsky, M. 2001. Relaxation of wobbling asteroids and comets - theoretical problems, perspectives on experimental observations. *Icarus* **120**, 212-219.
- Farinella, P., Paolicchi, P. e Zappalà, V. 1981. Analysis of the spin rate distribution of asteroids. *Astron. Astron. Astrophys.* **104**, 159-165.
- Farinella, P., Paolicchi, P. e Zappalà, V. 1982. The asteroids as outcomes of catastrophic collisions. *Icarus* **52**, 409-433.
- Farinella, P., Davis, D.R., Paolicchi, P., Cellino, A. e Zappalà, V. 1992. Asteroid collisional evolution: an integrated model for the evolution of asteroid rotation rates. *Astronomy and Astrophysics* **253**, 604-614.
- Fujiwara, A., Cerroni, P., Davis, D.R., Ryan, E.V., Di Martino, M., Holsapple, H. e Housen, K. 1989. Experiments and scaling laws for catastrophic collisions. Em *Asteroids II*, eds. Richard P. Binzel, Tom Gehrels e Mildred Shapley Matthews. Tucson: University of Arizona Press. pp. 240-265.
- Giblin, I., Martelli, G., Smith, P.N., Cellino, A., Di Martino, M., Zappalà, V., Farinella, P. e Paolicchi, P. 1994. Field fragmentation of macroscopic targets simulating asteroidal catastrophic collisions. *Icarus* **110**, 203-224.
- Giblin, I., Martelli, G., Farinella, P., Paolicchi, P., Di Martino, M. e Smith, P.N. 1994. The properties of fragments from catastrophic disruption events. *Icarus* **134**, 77-112.
- Gil-Hutton, R. e Brunini, A. 1999. Collisional evolution of the early asteroid belt. *Planetary and Space Science* **47**, 331-338.
- Hamilton, Sir W.R. 1866. *Elements of Quaternions*. London: Longmans, Green and

Co.

Harris, A.W. 1979. Asteroid rotation rates. II. A theory for the collisional evolution of rotation rates. *Icarus* **40**, 145-153

Harris, A.W. 1990. The collisional evolution of the spin of a nonspherical body. *Icarus* **83**, 183-185.

Harris, A.W. 1994. Note: tumbling asteroids. *Icarus* **107**, 209-211.

Harris, A.W. 2002. On the slow rotation of asteroids. *Icarus* **156**, 184-190.

Holsapple, K.A. 1987. Point-source solutions and coupling parameters in cratering mechanics. *Journal of Geophysical Research* **92**, 6350-6376.

Holsapple, K.A., 1993. The scaling of impact processes in planetary sciences. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* **21**, 333-373.

Holsapple, K., Giblin, I., Housen, K., Nakamura, A. e Ryan, E. 2002. Asteroid impacts: laboratory experiments and scaling laws. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of Arizona Press. pp. 443-462.

Housen, K.R. e Holsapple, K.A. 1999. Scale effects in strength-dominated collisions of rocky asteroids. *Icarus* **142**, 21-33.

Housen, K.R. e Holsapple, K.A. 2000. Numerical simulations of impact cratering in porous materials (abstract). Em *Lunar and Planetary Science XXXI*, Abstract #1498. Houston: Lunar and Planetary Institute. (CD-ROM)

Hirayama, K. 1918. Groups of asteroids probably of common origin. *Astron. J.* **31**, 185-188.

Kaasalainen, M. e Torppa, J. 2001. Optimization methods for asteroid lightcurve inversion. I. Shape determination. *Icarus* **153**, 24-36.

Kaasalainen, M., Torppa, J. e Muinonen, K. 2001. Optimization methods for asteroid lightcurve inversion. II. The complete inverse problem. *Icarus* **153**, 37-51.

Kawakami, S., Kanaori, Y., Fujiwara, A. Arakawa, M., Kato, M., Mizutani, H., Cerro, P., e Capaccioni, F. 1991. An experimental study of impact fracturing of small planetary bodies in the Solar System with an application to Phobos. *Astronomy and Astrophysics* **241**, 233-242.

Leinhardt, Z.M., Richardson, D.C, Quinn, T. 2000. Direct N-body simulations of rubble-pile collisions. *Icarus* **146**, 133-151.

Magnusson, P.M., Barucci, A., Druommond, J., Lumme, K., Ostro, S.J., Surdej, J., Taylor, S.C. e Zappalà, V. 1989. Determination of pole orientations and shapes of asteroids. Em *Asteroids II*, eds. Richard P. Binzel, Tom Gehrels e Mildred Shapley Matthews. Tucson: University of Arizona Press. pp. 67-97.

Merline, W.J., Weidenschilling, S.J., Durda, D.D., Margot, J., Pravec, P. e Storrs, A.D. 2002. Asteroids *do* have satellites. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of Arizona Press. pp. 289-312.

Michel, P.M., Tanga, P., Benz, W. e Richardson, R. 2002. Formation of asteroid

families by catastrophic disruption: simulations with fragmentation and gravitational re-accumulation. *Icarus* **160**, 10-23.

Nakamura, A. e Fujiwara, A. 1991. Velocity distribution of fragments formed in a simulated collisional disruption. *Icarus* **92**, 132-146.

Nakamura, A., Sugiyama, K. e Fujiwara, A. 1992. Velocity and spin of fragments from impact disruptions. I. An experimental approach to a general law between mass and velocity. *Icarus* **100**, 127-135.

Napier, W.McD. e Dodd, R. 1974. On the origin of asteroids. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **166**, 469-489.

Nolan, M.C., Asphaug, E., Melosh, H.J. e Greenberg, R. 1996. Impact craters on asteroids: does gravity or strength control their size? *Icarus* **124**, 359-371.

Nolan, M.C., Asphaug, E., Greenberg, R. e Melosh, H.J. 2001. Impacts on asteroids: fragmentation, regolith, transport and disruption. *Icarus* **153**, 1-15.

Paolicchi, P., Cellino, A., Farinella, P., e Zapallà, V. 1989. A semiempirical model of catastrophic breakup processes. *Icarus* **77**, 187-212.

Paolicchi, P., Verlicchi, A. e Cellino, A. 1996. An improved semi-empirical model of catastrophic impact processes. I. Theory and laboratory experiments. *Icarus* **121**, 126-157.

Paolicchi, P. Burns, J.A. e Weidenschilling, S.J. 2002. Side effects of collisions: spin rate changes, tumbling, rotation states and binary asteroids. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of

Arizona Press. pp. 517-526.

Penteado, P.F. 2002. Elipsóides Interagentes: Um modelo para a fragmentação de um corpo reacumulado. Projeto final de curso de graduação. Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Pravec, P. e Harris, A.W., 2000. Fast and slow rotation of asteroids. *Icarus* **148**, 12-20.

Pravec, P., Harris, A.W, e Michalowski, T. 2002. Asteroid rotations. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of Arizona Press. pp. 113-122.

Richardson, D.C., Bottke Jr., W.F. e Love, S.G. 1998. Tidal distortion and disruption of Earth-crossing asteroids (Paper I). *Icarus* **134**, 47-76

Richardson, D.C., Leinhardt, Z.M., Melosh, H.J., Bottke Jr., W.F. e Asphaug, E. 2002. Gravitational Aggregates: evidence and evolution. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of Arizona Press. pp. 501-515.

Ryan, E.V., Hartmann, W.K. e Davis, D.R. 1991. Impact experiments 3: Catastrophic fragmentation of aggregate targets and relation to asteroids. *Icarus* **94**, 283-298.

Ryan, E.V. 1992. Catastrophic collisions: laboratory impact experiments, hydrocode simulations and the scaling problem. Ph.D. thesis, University of Arizona, Tucson.

Ryan, E.V., Davis, D.R., e GIBLIN, I. 1999. A laboratory impact study of simulated Edgeworth-Kuiper Belt objects. *Icarus* **94**, 283-298.

Safronov, V.S. e Zvjagina, E.V. 1969. Relative sizes of the largest bodies during the accumulation of planets. *Icarus* **10**, 109-115.

Scheeres, D.J., Ostro, S.J., Werner, R.A., Asphaug, E. e Hudson, R.S. 2000. Effects of gravitational interactions on asteroid spin states. *Icarus* **147**, 106-118.

Scheeres, D.J., Durda, D.D., Geissler, P.E. 2002. The fate of asteroid ejecta. Em *Asteroids III*, eds. William Bottke, Alberto Cellino, Paolo Paolicchi e Richard P. Binzel. Tucson: University of Arizona Press. pp. 527-544.

Tanga, P., Cellino, A., Michel, P. e Zappalà, V. 1999. On the size distribution of asteroid families: the role of geometry. *Icarus* **141**, 65-78.

Weindenschilling, S.J. 1977. The distribution of mass in the planetary system and solar nebula. *Astrophysics and Space Sciences* **51**, 153-158.

Zappalà, V., Farinella, P., Knežević, Z. e Paolicchi, P. 1984. Collisional origin of the asteroid families: Mass and velocity distributions. *Icarus* **59**, 261-285.

Interacting ellipsoids: a minimal model for the dynamics of rubble-pile bodies

F. Roig,^{a,*} R. Duffard,^a P. Penteado,^a D. Lazzaro,^a and T. Kodama^b

^a *Observatório Nacional–MCT, Rua Gal. José Cristino 77, Rio de Janeiro, 20921-400 RJ, Brazil*

^b *Instituto de Física–UFRJ, Cx. Postal 68528, Rio de Janeiro, 21945-970 RJ, Brazil*

Received 13 March 2003; revised 7 July 2003

Abstract

A simple mechanical model is formulated to study the dynamics of rubble-pile asteroids, formed by the gravitational re-accumulation of fragments after the collisional breakup of a parent body. In this model, a rubble-pile consists of N interacting fragments represented by rigid ellipsoids, and the equations of motion explicitly incorporate the minimal degrees of freedom necessary to describe the attitude and rotational state of each fragment. In spite of its simplicity, our numerical examples indicate that the overall behavior of our model is in line with several known properties of collisional events, like the energy and angular momentum partition during high velocity impacts. Therefore, it may be considered as a well defined minimal model.

© 2003 Elsevier Inc. All rights reserved.

Keywords: Collisional physics; Impact processes; Rotational dynamics; Asteroids

1. Introduction

Rubble-pile asteroids are believed to be the outcomes of the re-accumulation of fragments after the catastrophic disruption of a large asteroid. They would be basically constituted by a cluster of several monolithic bodies, which are kept together by their mutual gravitational attraction, without any additional cohesive forces between them. Among several evidences, the actual existence of a large number of these cohesion-less bodies in the asteroid belt is suggested by:

- (i) the rather low mass densities ($\sim 1\text{--}2 \text{ g cm}^{-3}$) measured on some large asteroids (e.g., Merline et al., 1999; Veverka et al., 1997; Viateau, 2000; Yeomans et al., 1997, 1999);
- (ii) the notable absence of kilometer-sized and larger bodies with rotational periods shorter than $\sim 2 \text{ h}$ (e.g., Harris and Burns, 1979; Pravec and Harris, 2000; Weidenschilling, 1981);

- (iii) the unusual observed shapes of some asteroids (e.g., Bottke et al., 1999; Kwiatkowski, 1995; Miller et al., 2002; Thomas et al., 2002);
- (iv) the presence of giant craters and grooves on the surfaces of some asteroids recently revealed by the NEAR Shoemaker probe (e.g., Veverka et al., 1997); and
- (v) the existence of small asteroidal satellites and binary asteroids (e.g., Chapman et al., 1995; Merline et al., 1999).

Many collisional processes in the Solar System, like the formation of asteroid families, the tidal disruption of comets and NEAs, and the formation of asteroid satellites, may involve parent bodies with a rubble pile structure. Thus, the precise understandings of the collisional dynamics of rubble-piles would give important insight about these processes. One of the crucial questions about the formation of asteroid families is how the incident collisional energy is transferred into the rotational energies of the ejected fragments. The purpose of this paper is to introduce a minimal model to study such problems. This model aims to describe the macroscopic behavior of different quantities—like energy, angular momentum, escape velocities and spins—during the course of the dynamical processes involving rubble-pile asteroids,

* Corresponding author.

E-mail address: froig@on.br (F. Roig).

like gravitational re-accumulation, collisional fragmentation and/or tidal disruption.

Collisional phenomena have played an important role in Solar System dynamics. There are plenty of observational evidences that collisional impacts have been decisive to shape the size, spin and orbital distributions in the asteroid belt (e.g., Durda et al., 1998), as well as to sculpt the surfaces of the inner planets and the jovian satellites. In the light of such evidence, a big effort has been done to develop physical models aiming to simulate this kind of phenomena. These goes from the statistical models describing the collisional evolution of large populations of bodies (e.g., Wetherill, 1967; Dohnanyi, 1969; Farinella and Davis, 1992), passing through analytical (Petit and Farinella, 1993) and semi-empirical (Paolicchi et al., 1989) models, to the precise numerical simulation of binary collisions (e.g., Asphaug and Scheeres, 1999; Benz and Asphaug, 1994; Benz et al., 1994; Michel et al., 2001, 2002). A similar effort has also been applied in performing scaled-down laboratory experiments, aiming to analyze the outcomes of high velocity projectiles impacting small targets of different materials (e.g., Fujiwara and Tsukamoto, 1980, 1981; Giblin et al., 1994, 1998; Love et al., 1993; Nakamura and Fujiwara, 1991; Ryan and Melosh, 1998).

The physical and dynamical characteristics of the fragments after the catastrophic breakup of a body depends mainly on the regime in which the collision occurred. For small targets, catastrophic collisions occur in a regime dominated by the tensile strength of the material, and the probability of pulverizing the target is smaller for smaller bodies (e.g., Holsapple, 1994; Housen and Holsapple, 1990, 1999; Ryan, 1992). For large bodies, the collision happens in a gravity dominated regime, and in this case, the larger the target the higher impact energy that is needed to totally disperse the fragments (e.g., Benz and Asphaug, 1999; Davis et al., 1995; Love and Ahrens, 1996; Melosh and Ryan, 1997). The transition between these two regimes seems occur around target sizes between 100 m and 1 km (e.g., Benz and Asphaug, 1999; Durda et al., 1998).

Even if Earth-based laboratory experiments allow one to analyze the possible final states of the fragments after a collision in the tensile strength regime, it is not clear whether such results can be extrapolated to large scale asteroidal collisions or not (e.g., Ryan, 1992). Therefore, in the case of collisions among kilometer-sized bodies, the only way to assess the dynamics involved is through the use of physical models.

Collisional impacts among asteroids can be grouped in three categories:

- (i) cratering events, related to low energy impacts that do not breakup the target;
- (ii) shattering events, that create fractures in the inner structure of the impacted body, and may eventually break it into several fragments; and

- (iii) dispersing events, related to high-energy impacts that break up the target generating fragments with ejection velocities larger than the escape velocity from the impacted body.

Simulations of these kind of events have been possible in recent years thanks to the introduction of hydrodynamic models, which are mainly based on the Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH) method (Lucy, 1977; Gingold and Monaghan, 1977). These hydrocodes assume that the colliding bodies are constituted of many thousands of small particles, and simulate the evolution of these particles according to a given equation of state that involves the tensile strength and the properties of the material (e.g., Benz and Asphaug, 1994, 1999; Love and Ahrens, 1996). SPH models have had a great success and might be considered the state of the art in simulations of collisional impacts. Another important achievement has been the introduction of very efficient gravitational N -body codes to simulate collisional processes during the accretion of planetesimals, as well as the tidal disruption of rubble-pile asteroids (Bottke et al., 1999; Leinhardt and Richardson, 2002; Leinhardt et al., 2000; Richardson et al., 2000).

In a recent work, Michel et al. (2001) combine the SPH technique with an N -body gravitational model to study the outcomes of a breakup event in the gravity dominated regime. In this model, the hydrocode is used first to impact a monolithic target and to propagate the fractures, disregarding gravitation. The outcome of this simulation is then fed into the N -body code (Richardson et al., 2000), which simulates the subsequent evolution of the system. With this model, the authors can analyze the different properties of the resulting fragments, like size distribution, ejection velocity field, as well as the processes occurring after the breakup, like gravitational re-accumulation of fragments and formation of satellites.

One of the relevant observables that carries information about the collisional processes during the formation of asteroidal families is the rotational properties of the fragments. Due to the nature of the hydrodynamic equations, the SPH models do not consider *explicitly* the rotational degrees of freedom of the fragments. In fact, the fragment's rotation appears as a consequence of the collective translational motion of re-accumulated SPH particles (e.g., Asphaug and Scheeres, 1999). Since this rotation involves an extremely complex motion of hydrodynamical origin, the SPH models are not transparent to show how the impact energy is transferred to the fragments' spins. The same kind of limitation is present in the direct N -body simulations of rubble-pile dynamics (see Richardson et al., 2003), where the rotational state of gravitational aggregates is determined by the collective translational motion of their components. Thus, in order to analyze this problem, it may be more convenient to introduce explicitly in the model the degrees of freedom related to the attitude and spin of the individual fragments from the very beginning.

Motivated by this idea, we introduce a new model based on a purely mechanical approach, without considering the thermodynamical properties of the fragments' material. We assume that the gravitational re-accumulation has already taken place, so that we start with a single rubble-pile composed of some tens or hundreds of monolithic fragments, with a given size distribution. For the sake of simplicity, we consider these fragments as rigid triaxial ellipsoids, interacting with each other via their gravitational attraction and a short-range repulsive mutual potential. Then, we obtain the Lagrangian of the system, expressed in terms of the minimal degrees of freedom that are necessary to describe the translational and rotational dynamics of each fragment. We expect that these minimal degrees of freedom were enough to reproduce the basic macroscopic dynamics during the break-up of a rubble-pile under the effect of collisions or tidal forces. It should be stressed that, differently from SPH or N -body simulations, *the present model does not intend to provide detailed simulations of a given collisional event*, neither in the gravity nor in the strength regimes. *Rather, it intends to provide a general understanding of the macroscopic processes involved in rubble-pile fragmentation*—like energy partition, angular momentum transfer, ejection velocities, and especially attitude and spin distributions of the fragments—, *in terms of the smallest possible number of degrees of freedom*.

This paper is organized as follows: In Section 2 we describe our model in detail. We introduce the interaction potential among the fragments in Section 2.1. The strategy to propagate the attitude of the fragments is presented in Section 2.2. Dissipative effects are treated in Section 2.4. Section 3 presents some numerical experiments with the model. The results are analyzed and discussed in Section 4. Finally, Section 5 is devoted to the conclusions.

2. The model

Our model is constituted by a set of N interacting rigid bodies, each of them represented by a triaxial ellipsoid of mass m_i and principal semi-axes $A_i \geq B_i \geq C_i$. The dynamical state of each ellipsoid is determined by its center of mass position $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ and velocity $\dot{\mathbf{r}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$, and by the attitude of the ellipsoid $\boldsymbol{\varphi}_i = (\phi_i, \theta_i, \psi_i)$, where ϕ, θ, ψ are the Euler angles,¹ and the spin components around the principal axes of the ellipsoid:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{pmatrix} \sin \theta_i \sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ \sin \theta_i \cos \psi_i & -\sin \psi_i & 0 \\ \cos \theta_i & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i. \quad (1)$$

Thus, the whole system has $6N$ degrees of freedom.

The mass distribution of each ellipsoid is modeled by a Gaussian

$$\rho_i(\mathbf{r}) = \rho_{0i} \exp(-\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{E}_i \mathbf{R}_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)), \quad (2)$$

where \mathbf{r} is referred to a fixed coordinate system, $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}^z(\psi_i) \mathbf{R}^y(\theta_i) \mathbf{R}^x(\phi_i)$ is a standard rotation matrix, and the superscript T refers to the transpose.² The matrix \mathbf{E}_i is a purely diagonal matrix with elements $1/A_i^2$, $1/B_i^2$, and $1/C_i^2$ that characterizes the ellipsoid. The value of ρ_{0i} is chosen such that

$$m_i = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{r} \rho_i(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\pi^3}{\kappa^3}} \rho_{0i} A_i B_i C_i. \quad (3)$$

The constant κ , which determines the width of the distribution, will be fixed later. The use of a Gaussian mass distribution does not have any physical relation with the actual mass density of an asteroid, which is presumably constant up to its edges. As we will see later, the mass distribution is used to define the mutual short-range repulsive interaction potential between two ellipsoids. Thus, the actual form of the distribution is not important provided that this interaction potential is well defined. The simplest choice is a Gaussian function since it is very easy to manipulate. Moreover, according to this mass distribution, the principal moments of inertia around the principal axes of the ellipsoid are given by

$$\mathbf{I}_i = \frac{m_i}{2\kappa} \begin{pmatrix} B_i^2 + C_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & C_i^2 + A_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_i^2 + B_i^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

which, for $\kappa = 5/2$, are the same principal moments of inertia of an ellipsoid of constant density. This is relevant for the estimation of the spin velocities, as we will see in Section 4.3.

2.1. Interaction potential

The evolution of the system is described by the Lagrangian function

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathcal{K}_T + \mathcal{K}_R - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{U}_{ij}, \quad (5)$$

where $\mathcal{K}_T = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 / 2$ is the translational kinetic energy, $\mathcal{K}_R = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i / 2$ is the rotational kinetic energy, and \mathcal{U}_{ij} is the interaction potential. This latter is given by the sum of a gravitational attractive term \mathcal{U}_{Gij} and a contact repulsive term \mathcal{U}_{Cij} , which avoids the penetration between the ellipsoids. In our approach, we consider only the gravitational monopole

$$\mathcal{U}_{Gij} = -\frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (6)$$

where G is the gravitational constant, and define

$$\mathcal{U}_{Cij} = \mathcal{U}_{0ij} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{r} \rho_i(\mathbf{r}) \rho_j(\mathbf{r}), \quad (7)$$

¹ The Euler angles are defined such that θ represents the obliquity of a body spinning around its minor axis.

² Hereafter, a vector \mathbf{s} will be assumed to be a column vector while \mathbf{s}^T will represent a row vector. Thus $\mathbf{s}^T \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = s^2$ is the usual scalar product and $\mathbf{s} \mathbf{s}^T = \mathbf{s} \mathbf{s}$ is a projection matrix.

where \mathcal{U}_{0ij} is a constant to be determined. The potential \mathcal{U}_{Cij} is large when the ellipsoids are close by, and rapidly goes to zero as they get apart. Explicitly we have

$$\mathcal{U}_{Cij} = \mathcal{U}_{0ij} \rho_{0i} \rho_{0j} \exp(-\kappa(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{Q}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) \times \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} \exp(-\kappa(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij})^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij})), \tag{8}$$

where

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{E}_i \mathbf{R}_i, \tag{9}$$

$$\mathbf{r}_{ij} = (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j)^{-1} (\mathbf{A}_i \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_j \mathbf{r}_j),$$

and \mathbf{Q}_{ij} is the totally symmetric matrix defined by $\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j)^{-1} \mathbf{A}_j = \mathbf{Q}_{ji}$.

The integral in Eq. (8) can be easily evaluated to get

$$\mathcal{U}_{Cij} = \mathcal{U}_{0ij} \rho_{0i} \rho_{0j} \exp(-\kappa(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{Q}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)) \times \sqrt{\frac{\pi^3}{\kappa^3}} [\det |\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j|]^{-1/2}. \tag{10}$$

The values of \mathcal{U}_{0ij} and κ are determined only once by requiring that

- (i) the mutual potential $\mathcal{U}_{Cij} + \mathcal{U}_{Gij}$ has a minimum \mathcal{U}_{ij}^{\min} when the ellipsoids' surfaces are in contact;
- (ii) this minimum is of the order of the mutual gravitational potential, more precisely

$$f \leq \frac{\mathcal{U}_{ij}^{\min}}{\mathcal{U}_{Gij}} < 1, \quad \text{with } f \gg 0.$$

Assuming spherical fragments of radius R_i, R_j , the above conditions lead to

$$\kappa = \frac{1}{2(1-f)} > \frac{3}{2},$$

$$\mathcal{U}_{0ij} = \frac{G\pi^{3/2}}{2} (R_i + R_j)^2 \frac{\exp(\kappa\lambda_{ij})}{(\kappa\lambda_{ij})^{5/2}}, \tag{11}$$

where

$$\lambda_{ij} = \frac{(R_i + R_j)^2}{R_i^2 + R_j^2} \tag{12}$$

is such that $1 < \lambda_{ij} \leq 2$. In the case of ellipsoidal bodies, the values of κ and \mathcal{U}_{0ij} can be still determined by Eqs. (11)–(12) using the “equivalent radius” $R_i = (A_i B_i C_i)^{1/3}$. The shape of the interaction potential is shown in Fig. 1.

The value of κ (or f) in Eq. (11) is a free parameter of the model. An appropriate value of κ may be fixed by requiring that during a high-velocity collision between any pair of ellipsoids, the kinetic energy of the impacting body is much smaller than the maximum of the mutual potential barrier (see Fig. 1). In this way, we avoid penetration between the bodies. In practice, this is done by considering the pair k, l having the smallest amplitude in their contact mutual potential (Eq. (10)), and constraining this amplitude in such a way

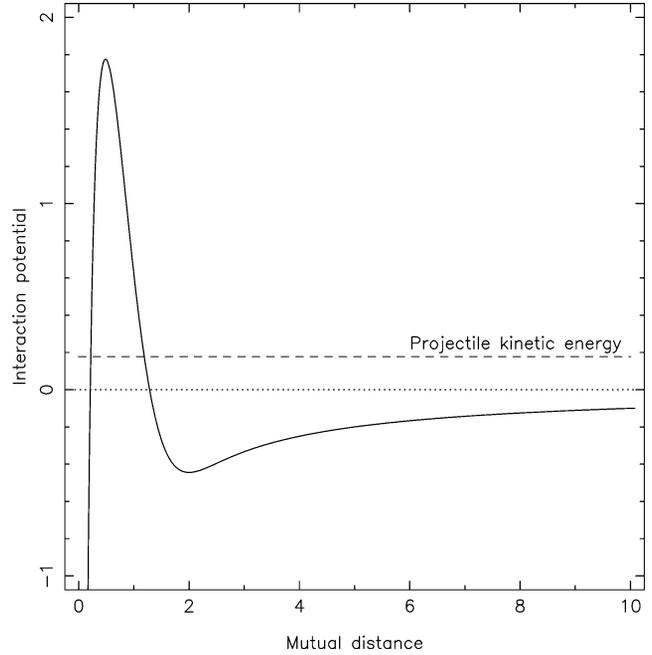


Fig. 1. Interaction potential \mathcal{U}_{ij} in dependence of the mutual distance $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. The minimum is approximately located at the point where the centers of mass of the ellipsoids are separated by a distance $R_i + R_j$ (see text). The maximum of the potential barrier is about ten times larger than the kinetic energy of a typical projectile.

that

$$\mathcal{U}_{0kl} \rho_{0k} \rho_{0l} \sqrt{\frac{\pi^3}{\kappa^3}} [\det |\mathbf{A}_k + \mathbf{A}_l|]^{-1/2} = \beta \mathcal{K}, \tag{13}$$

where \mathcal{K} is a prescribed kinetic energy, as large as possible, and $\beta \sim 10$.

Equation (13) has to be solved for κ using the largest possible value of m_l and the smallest possible value of m_k . If we assume spherical bodies and choose $\mathcal{K} = m_l \mathbf{v}^2 / 2$ —for a prescribed value of the relative velocity \mathbf{v} —, we may write Eq. (13) as

$$\frac{\exp(\kappa\lambda_{kl})}{\kappa\lambda_{kl}} = \beta \mathbf{v}^2 \frac{R_k + R_l}{Gm_k}, \tag{14}$$

which may be easily solved by Newton’s method. Note that, since $\kappa > 3/2$, the above relation constrains the prescribed impact velocities to $\mathbf{v}^2 > 0.3 Gm_k / (R_k + R_l)$.

The use of triaxial ellipsoids, and the dependence of the contact potential on the fragments’ shapes, are essential for the description of the attitudes and spins of the fragments. Otherwise no spin–spin interactions would take place and only the translational degrees of freedom would participate in the dynamics.³ However, even if the bodies have ellip-

³ Actually, for two spherical bodies of radius R_i, R_j we have

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^T \mathbf{Q}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 / (R_i^2 + R_j^2),$$

$$\det |\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j| = (R_i^2 + R_j^2)^3 / (R_i^6 R_j^6),$$

and the interaction potential does not depend on the Euler angles.

soidal shape, the multipole gravitational interactions among them are neglected for the sake of simplicity. We may argue that the effects of quadrupole or higher multipole interactions have no appreciable influence on the dynamics during short time scale collisional processes; thus they may be neglected for the purpose of the present study. On the other hand, we should expect that multipole interactions play a significant role on the long term dynamics, contributing to change the spin rates and tumbling states of the bodies, as pointed out by Scheeres et al. (2000). Therefore, multipole interactions should be taken into account for study long time scale processes like gravitational re-accumulation or tidal disruption.

2.2. Quaternions

The use of Euler angles to follow the evolution of the attitude of a rigid body presents a major shortcoming: the equations of motion *become singular* when the angle θ , i.e., the obliquity of the body, goes to zero. This is because, for $\theta = 0$, the other angles ϕ , ψ cannot be determined as independent quantities, since only the sum $\phi + \psi$ is defined. This limitation can be overcome by substituting the Euler angles with an adequate set of regular variables. These regular variables are known as “quaternions” (Whittaker, 1959).

Quaternions are a set of 4-vectors, $\bar{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}, q)$, with \mathbf{q} being a 3-vector and q a scalar, for which the following binary products are defined:

$$\bar{\mathbf{q}}_1 \cdot \bar{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 + q_1 q_2, \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_1 \times \bar{\mathbf{q}}_2 = (q_1 \mathbf{q}_2 + q_2 \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2, q_1 q_2 - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2). \quad (16)$$

Under the product Eq. (16) a set of uni-modulus quaternions ($\bar{\mathbf{q}}^2 = 1$) form a group which is isomorphic to the group $SU(2)$ of rotations in the unit sphere, hence to the group $O(3)$. Therefore, a set of uni-modulus quaternions can be used as a representation of the group of 3D rotations. If we define the quaternion $\bar{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}, 0)$, the rotation of the vector \mathbf{r} by an angle χ around the unit vector \mathbf{n} may be expressed as

$$\bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{q}}^{-1} \times \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{q}}, \quad (17)$$

where

$$\bar{\mathbf{q}} = \left(\sin \frac{\chi}{2} \mathbf{n}, \cos \frac{\chi}{2} \right),$$

$$\bar{\mathbf{q}}^{-1} = \left(-\sin \frac{\chi}{2} \mathbf{n}, \cos \frac{\chi}{2} \right). \quad (18)$$

Hereafter, we will omit the “bars” and will denote the quaternion associated to the i th ellipsoid simply as $\mathbf{q}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$. The components of \mathbf{q}_i are defined in terms of the Euler angles as follows:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sin \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\phi_i - \psi_i}{2}, & \beta_i &= \sin \frac{\theta_i}{2} \sin \frac{\phi_i - \psi_i}{2}, \\ \gamma_i &= \cos \frac{\theta_i}{2} \sin \frac{\phi_i + \psi_i}{2}, & \delta_i &= \cos \frac{\theta_i}{2} \cos \frac{\phi_i + \psi_i}{2}, \end{aligned} \quad (19)$$

and this definition clearly avoids the problem with the indetermination of ϕ and ψ when $\theta = 0$. Note that we are substituting the use of *three* Euler angles by *four* quaternion’s components satisfying the constraint

$$\mathbf{q}_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 + \delta_i^2 = 1. \quad (20)$$

We may now write the rotation matrix \mathbf{R}_i appearing in Eq. (2) in terms of the quaternion’s components. This takes the form

$$\mathbf{R}_i = 2 \begin{pmatrix} \alpha_i^2 + \delta_i^2 - \frac{1}{2} & \alpha_i \beta_i + \gamma_i \delta_i & \alpha_i \gamma_i - \beta_i \delta_i \\ \alpha_i \beta_i - \gamma_i \delta_i & \beta_i^2 + \delta_i^2 - \frac{1}{2} & \beta_i \gamma_i + \alpha_i \delta_i \\ \alpha_i \gamma_i + \beta_i \delta_i & \beta_i \gamma_i - \alpha_i \delta_i & \gamma_i^2 + \delta_i^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

and, as expected, $\mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i = \mathbf{1}$. As we see, the rotation matrix is now written in terms of a bilinear form of the quaternion components. This is another advantage of the use of quaternions in numerical procedures, since the attitude of a rigid body is no longer described in terms of time-consuming trigonometric functions.

Taking the time derivative of Eq. (21) and using the fact that

$$\mathbf{q}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i = 0 \quad (22)$$

we may write the spin of a body (Eq. (1)) as:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (23)$$

where

$$\mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} \delta_i & \gamma_i & -\beta_i & -\alpha_i \\ -\gamma_i & \delta_i & \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & -\alpha_i & \delta_i & -\gamma_i \\ \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}, \quad (24)$$

and again $\mathbf{W}_i^{-1} \mathbf{W}_i = \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i = \mathbf{1}$. As a consequence, the rotational kinetic energy of the body takes the form

$$\mathcal{K}_R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (25)$$

where $\mathbf{M}_i = 4 \mathbf{W}_i^T \tilde{\mathbf{I}}_i \mathbf{W}_i$, and $\tilde{\mathbf{I}}_i$ is the 4×4 diagonal matrix

$$\tilde{\mathbf{I}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{Tr}(\mathbf{I}_i) \end{pmatrix} \quad (26)$$

obtained from Eq. (4).

2.3. Equations of motion

With the introduction of the quaternions, the Lagrangian of the system can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{q}}_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{U}_{Cij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{U}_{Gij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \end{aligned} \quad (27)$$

The conjugate momenta are

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad \mathbf{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (28)$$

and the equations of motion take the form

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i}, \quad (29)$$

where the symbols $\partial/\partial \mathbf{r}_i$, $\partial/\partial \mathbf{q}_i$ represent gradients. The computation of the second members is relatively straightforward.⁴

Although the use of quaternions avoids the occurrence of singularities in the equations of motion, they introduce an additional complication: we have now $7N$ second-order differential equations to solve instead of the original $6N$ equations. It is clear that N of these equations can be eliminated using the constraints Eqs. (20) and (22). However, the direct elimination of one component of the quaternion is found to be undesirable, because the remaining equations of motions become much more complicated, containing non-linear relations among the other three components. Moreover, if we use only three components of the quaternion, the resulting equations of motion become always singular at some point, just like the equations for the Euler angles, hence destroying the main advantage of the use of quaternions.

In view of this, we will keep all the four components of the quaternions in our calculations, and will incorporate the constraints through the method of Lagrange multipliers. Since the equations for $\dot{\mathbf{u}}_i$ are not affected by this procedure, we will concentrate only in the equations for $\dot{\mathbf{p}}_i$. The standard procedure is to use Eq. (20) to define the “effective” Lagrangian

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (\mathbf{q}_i^2 - 1) \lambda_i(t), \quad (30)$$

where the Lagrange multipliers λ_i are scalar functions of time. The constraint Eq. (20) leads to

$$\lambda_i(t) = \mathbf{q}_i \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} - \mathbf{q}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (31)$$

Therefore, the equations of motion are re-written as

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} - \mathbf{q}_i \lambda_i(t), \quad (32)$$

⁴ Note that, to determine $\dot{\mathbf{p}}$, it is necessary to compute the gradient of $\det[\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j]$. This may be obtained from the definition

$$\frac{\partial \det[\mathbf{A}(q)]}{\partial q} = \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\det[\mathbf{A}(q + \delta q)] - \det[\mathbf{A}(q)]}{\delta q}.$$

Using the fact that $\mathbf{A}(q + \delta q) \simeq \mathbf{A}(q) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \delta q$, and that $\det[1 + \mathbf{A} \delta q] \simeq 1 + \text{Tr}(\mathbf{A}) \delta q$, the result is

$$\frac{\partial \det[\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j]}{\partial \mathbf{q}_i} = \det[\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j] \text{Tr} \left((\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j)^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \right).$$

and substituting Eq. (31) in Eq. (32) we get

$$\{\mathbf{1} - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot\} \dot{\mathbf{p}}_i = \{\mathbf{1} - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot\} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i}. \quad (33)$$

The operator $\{\mathbf{1} - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot\} \equiv \mathbf{q}^2 - \mathbf{q} \mathbf{q}^T$ is a “ 4×4 -projector” such that $\{\mathbf{1} - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot\} \mathbf{q}_i = 0$, which means that, as expected, the components of \mathbf{q}_i are not linearly independent.

Since, for a given \mathbf{q}_i , one component of the vectorial equation (33) is linearly dependent on the other three, we need an additional equation to replace it. Combining Eq. (22) with (28) we have

$$\mathbf{q}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i \equiv \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} \dot{\mathbf{p}}_i = 0, \quad (34)$$

and taking the time derivative and re-arranging terms, we arrive to the scalar equation

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^T \mathbf{M}_i^{-2} \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (35)$$

where $\dot{\mathbf{M}}_i$ depends on $\dot{\mathbf{W}}_i = \dot{\mathbf{W}}(\dot{\mathbf{q}}_i)$, which is obtained by taking the time derivative of each coefficient of \mathbf{W}_i .

The procedure to advance the differential equations for a given \mathbf{p}_i is to discard one component from the vectorial equation (33) and replace it with Eq. (35). Since Eq. (33) does not provide any information in the direction of \mathbf{q}_i , the best choice would be to replace the component that is precisely in the direction of \mathbf{q}_i , or at least, the component that has the largest scalar product with \mathbf{q}_i . In practice, this can be done by choosing the component of \mathbf{q}_i which has the largest absolute value, and eliminating the equation corresponding to this component from Eq. (33). As a result, we get the following linear system of equations that has to be solved for $\dot{\mathbf{p}}_i$:

$$\begin{pmatrix} \{\mathbf{1} - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot\}^* \\ \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_i = \begin{pmatrix} \{\mathbf{1} - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot\}^* \partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}_i^{-1} \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_i^T \mathbf{M}_i^{-2} \mathbf{p}_i \end{pmatrix}, \quad (36)$$

where $\{\mathbf{1} - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot\}^*$ represents the “ 3×4 -projector” obtained from deleting the row of $\{\mathbf{1} - \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot\}$ corresponding to the largest component of \mathbf{q}_i .

It is worth noting that Eqs. (29) and (36) describe the evolution of a conservative system that *preserves total energy and total linear and angular momenta*. Conservation of energy implies that the interaction between the ellipsoids occur in a regime of total elasticity. This is not the case for real systems, where we should expect that energy dissipates (for example, in the form of heat) due to mutual collisions and/or friction. We will see in the next section how we may take into account these effects.

2.4. Dissipation function

In order to incorporate dissipation of energy in our model we introduce a dissipation function $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{q}})$ such that the equations of motion take the form

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} - \mathbf{q}_i \lambda_i(t) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}. \quad (37)$$

We will require that this function be:

- (i) bi-quadratic in $\dot{\mathbf{r}}$ and $\dot{\mathbf{q}}$, and
- (ii) negative definite.

Under these assumptions, it is straightforward to show that $d\mathcal{H}/dt = 2\mathcal{F} < 0$, where \mathcal{H} is the total energy (Hamiltonian) of the system. \mathcal{F} is usually called the ‘‘Rayleigh dissipation function.’’

We would also like to introduce the dissipation mechanism among the interacting ellipsoids in such a way that the dissipation only occurs when their surfaces are in contact, but it vanishes as soon as they reach a collective rigid body motion. We start by considering two ellipsoidal bodies, i and j , that partially overlap each other, and a point of coordinate \mathbf{r} lying in the overlapping region. If $\mathbf{s}^{(i)}$ represents the coordinate of this point in the reference system fixed to ellipsoid i (i.e., aligned with its principal axes), we may write $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i^T \mathbf{s}^{(i)}$, that is, $\mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{R}_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. In the same way, if $\mathbf{s}^{(j)}$ is the coordinate of the point in the reference system fixed to ellipsoid j , we have $\mathbf{s}^{(j)} = \mathbf{R}_j(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$. Now, the velocity of the point in terms of the motion of ellipsoid i is

$$\dot{\mathbf{r}}^{(i)} = \dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{s}^{(i)}, \quad (38)$$

where $\dot{\mathbf{R}}_i = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$ is obtained by taking the time derivative of each coefficient of \mathbf{R}_i . In the same way, in terms of the motion of ellipsoid j , we have

$$\dot{\mathbf{r}}^{(j)} = \dot{\mathbf{r}}_j + \dot{\mathbf{R}}_j^T \mathbf{s}^{(j)} \quad (39)$$

and the condition of rigid body motion holds if $\dot{\mathbf{r}}^{(i)} = \dot{\mathbf{r}}^{(j)}$ for all \mathbf{r} .

From the above considerations, a possible choice for the Rayleigh dissipation function (among others) would be $\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathcal{F}_{ij}$ with

$$\mathcal{F}_{ij} = -\mathcal{F}_0 \mathcal{U}_{0ij} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} \rho_i(\mathbf{r}) \rho_j(\mathbf{r}) (\dot{\mathbf{r}}^{(i)} - \dot{\mathbf{r}}^{(j)})^2. \quad (40)$$

We may note that $\dot{\mathbf{R}}$ is linear in $\dot{\mathbf{q}}$, thus, this choice of \mathcal{F}_{ij} fulfills conditions (i) and (ii), is large only when the ellipsoids are in mutual contact, and vanishes for a collective rigid body motion. Since \mathcal{F} is expressed in terms of the motion of a point, we will refer to it as the ‘‘point dissipation function.’’ Explicitly, we get:

$$\mathcal{F}_{ij} = -\mathcal{F}_0 \mathcal{U}_{Cij} \left\{ \frac{1}{2\kappa} \text{Tr}(\mathbf{\Gamma}_{ij}^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_j)^{-1} \mathbf{\Gamma}_{ij}) + [\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j + \dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{R}_i(\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_i) - \dot{\mathbf{R}}_j^T \mathbf{R}_j(\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_j)]^2 \right\} \quad (41)$$

where \mathbf{A}_i , \mathbf{A}_j and \mathbf{r}_{ij} are given by Eqs. (9), and $\mathbf{\Gamma}_{ij}$ is the anti-symmetric matrix defined by $\mathbf{\Gamma}_{ij} = \dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{R}_i - \dot{\mathbf{R}}_j^T \mathbf{R}_j = -\mathbf{\Gamma}_{ji}$. The derivatives of \mathcal{F} with respect to $\dot{\mathbf{r}}_i$ and $\dot{\mathbf{q}}_i$ are straightforward.

The coefficient \mathcal{U}_{0ij} is given by Eq. (11), while the coefficient \mathcal{F}_0 may be arbitrarily chosen to achieve the desired dissipation. A large value of \mathcal{F}_0 , for example, allows the perfect sticking of two colliding bodies. In this sense, *the dissipation function also acts as a cohesive force* that introduces some sort of mutual strength between the fragments in the rubble-pile. In practice, we fix $\mathcal{F}_0 \approx 1$. This choice seemed to be the most appropriate since, in all our examples of high velocity impacts, the fraction f_{KE} of kinetic energy that is transferred from the projectile to the fragments is between 1 and 10%, in good agreement with the values found in the literature, and we are able to reproduce the typical ejection velocities ($\sim 100 \text{ m s}^{-1}$) predicted by hydrocodes.

Finally, we can show that the point dissipation function Eq. (41) only dissipates energy but does not modify other conservation laws, i.e., *the total linear and angular momenta of the system are preserved* (see Appendix A). Notwithstanding, we would like to stress that this is an arbitrary choice and there is no especial reason to require that a given dissipation function should preserve either linear or angular momentum. For example, our model is not accounting for the production of dust at the impact point during a collision, and we might expect that some fraction of momentum is carried out by this cloud of dust (see Paolicchi et al., 2003). In this case, neither linear nor angular momentum would be conserved. However, at variance with kinetic energy, we do not know how to calibrate this effect, so we prefer to keep a form of dissipation that preserves linear and angular momentum.

3. Numerical experiments

We perform a series of numerical experiments of collisional events with high-velocity projectiles impacting rubble-pile targets. In these calculations, we vary the different parameters of the system like the specific impact energy, the impact angle and the properties of the target, as explained in the following.

Each target consists of N monolithic ellipsoidal fragments following a power law cumulative size distribution $\propto D^{-2.5}$. All the fragments have the same shape, with their principal axes in the ratios $B_i/A_i = 0.7$ and $C_i/A_i = 0.5$, which are the approximate ratios usually inferred from asteroid light curves (e.g., Harris and Burns, 1979). The mean mass density of the fragments was set to $\bar{\rho} = 3 \text{ g cm}^{-3}$ in all cases. Recall that $\bar{\rho}$ is related to the ‘‘peak’’ density in Eq. (2) through

$$\rho_{0i} = \frac{4}{3} \bar{\rho}_i \sqrt{\frac{\kappa^3}{\pi}}. \quad (42)$$

The fragments are initially oriented and distributed at random, with the largest one being at the center of the rubble-pile. We expect that this would be the natural result from a re-accumulation process, where the largest fragments aggregate first, leaving the smaller ones near the surface of the

Table 1
Properties of the different targets used in our numerical experiments

| Target | N30 | N100 | N200 |
|---|--------|--------|--------|
| Total mass [10^{18} kg] | 10.03 | 9.99 | 10.05 |
| Effective radius [km] | 92.76 | 92.64 | 92.82 |
| Apparent radius [km] | 107.44 | 107.43 | 110.10 |
| Effective density [g cm^{-3}] | 3.00 | 3.00 | 3.00 |
| Apparent density [g cm^{-3}] | 1.93 | 1.92 | 1.80 |
| Porosity | 0.36 | 0.36 | 0.40 |
| Major radius of largest fragment [km] | 90.51 | 84.85 | 83.43 |
| Equivalent radius of largest fragment [km] | 64.00 | 60.00 | 59.00 |
| Major radius of smallest fragment [km] | 22.62 | 14.14 | 9.89 |
| Equivalent radius of smallest fragment [km] | 16.00 | 10.00 | 7.00 |

The effective radius is computed from the sum of the volumes of the individual fragments, while the apparent radius is the average geometric radius of the target. This latter is computed from the distances between the edges of the ensemble of fragments along the directions x , y , z . The porosity is calculated from the definition: $1 - \text{apparent density}/\text{effective density}$.

rubble-pile. To mount such configurations, we use a Monte-carlo code that generates a random distribution of fragments within a given volume. This volume is not much larger than the sum of the fragments' volumes, but it is large enough as to guarantee that initially the ellipsoids are not in mutual contact. In this configuration, the central ellipsoid is given an initial spin, Ω , around the z axis in the fixed coordinate system. The remaining ellipsoids are given an initial velocity in the x , y plane such that they all have the same angular velocity, Ω , around the center of mass of the system. These initial conditions are then evolved, including the effect of dissipation, until the ellipsoids re-accumulate and reach a collective nearly-rigid body motion. In this way, we end up with a rubble pile structure close to a figure of equilibrium and spinning around the z axis with an angular velocity $\sim \Omega$. Note that due to the particular setup of the parameters of the mutual potential \mathcal{U}_{ij} (Eq. (11)), the ellipsoids may slightly overlap between them, but this overlap is just geometrical and does not affect the dynamics.

We setup different target configurations with $N = 30, 100$ or 200 fragments, in such a way that all the targets has approximately the same total mass $M \simeq 10^{19}$ kg. The targets are also initially rotating with periods $\tau = 4$ or 12 h. Table 1 summarizes some properties of the different targets used in our calculations.

The projectiles are represented by a single ellipsoidal body, with the same mass density and the same axis ratios as the target's fragments. We use three different projectiles, hereafter named P1, P2, and P3. Each projectile initially moves in the y, z plane toward the center of mass of the target with relative velocity $|\mathbf{v}_p| = 5 \text{ km s}^{-1}$. The trajectory forms an angle ζ with the rotational axis of the target, that is set to $\zeta = 0^\circ, 45^\circ$ or 90° . The projectiles have initially random attitude and zero spin. Table 2 summarizes some of the properties of these projectiles.

We may expect that during these high velocity impacts several fragments in the target were actually shattered and broken up, while in our numerical examples the different

Table 2
Properties of the projectiles used in our numerical experiments

| Projectile | P1 | P2 | P3 |
|--|-------|-------|-------|
| Mass [10^{18} kg] | 0.036 | 0.120 | 0.284 |
| Major radius [km] | 20.00 | 30.00 | 40.00 |
| Equivalent radius [km] | 14.14 | 21.21 | 28.28 |
| Specific energy of impact [10^9 erg g^{-1}] | 0.44 | 1.49 | 3.54 |

The specific energy of the impact is computed as: $Q = 0.5m_p v_p^2/M$.

fragments are considered unbreakable. In principle, this is not an intrinsic limitation of the model, because the dissipation function (Eq. (41)) acts as a glue between the fragments. Thus, the breakup of a single fragment may be described in terms of the “breakup” of a collection of smaller glued fragments.⁵ In this way, we may assume that we are not propagating the cracks during the impact—the shattering is already present in the target—, but simply partitioning the energy and angular momentum among the fragments.

All the examples span $10\,000$ s. In all cases, the impact occurs at $t \simeq 80\text{--}100$ s. The equations of motion (Eq. (37)) are integrated in double precision using a Bulirsch–Stoer algorithm (Press et al., 1997). Positions and velocities are referred to the center of mass of the system. At each step of the integration, the linear equations (36) are solved through LU decomposition. The tolerance error for the solution of Bulirsch–Stoer routine is set to $10^{-8}\text{--}10^{-9}$. This tolerance is rather small for this kind of integrator, but a more stringent value substantially increases the computational time. This is because the step size needs to be very small in order to resolve the motion when the ellipsoids are in mutual contact. Indeed, when a pair of ellipsoids fall deep into the potential basin of Fig. 1, their mutual distance rapidly oscillates, with a typical period of a few seconds or even less, and the step size is drastically reduced by the integrator. This problem disappears as soon as the ellipsoids get apart. A typical integration of 200 fragments requires about 15 hours of CPU on a Pentium 4 processor.

Finally, we check in our calculations for the conservation of energy and momenta. When dissipation is turned off, these quantities are preserved within the tolerance error used for the Bulirsch–Stoer propagator. With dissipation turned on, linear and angular momentum are still preserved within the same precision and, as expected, the energy decreases as $H(T) = H_0 + 2 \int_0^T F dt$.

4. Results

We concentrate our analysis on the behavior of some quantities that characterize the collisions and allow us to evaluate the performance of our model. Particular emphasis

⁵ Of course this approach is limited by the resolution of the model, and would not be valid if the single fragment is likely to be pulverized.

is put on the behavior of the energy and angular momentum, as well as the ejection velocity field. The main capabilities of the model are especially exploited by analyzing the spin and attitude distributions of the fragments after the impacts.

From most results we can extract a qualitative tendency of the observables in the different numerical examples, and there are also some significant quantitative differences. All the results we present in the following refer to the dynamical state of the system *a few minutes after the impact*. In most cases we do not observe significant variations of these results over our integration time span. For example, the attitude and spin distributions are basically the same a few seconds after the impact than a few hours later (see Section 4.3). In our examples, some fragments ended in mutual escaping trajectories, while others remained bounded (see Section 4.2). Therefore, we may expect that these fragments will re-accumulate over the time-scales longer than our integration time span.

4.1. Energy partition and angular momentum

Figure 2a shows the energy partition during a typical collision between target N200 and projectile P2. At the moment of the impact ($t \simeq 80$ s) the projectile loses almost all its kinetic energy, which is mostly transferred to the kinetic energy of the fragments causing the peak in the dashed curve. However, during the collision there is a net loss of total energy due to dissipation (Eq. (41)), and a few seconds after the impact the fragments lose most of the energy they gained. Even if the final kinetic energy is always larger than the initial one, it only represents a small fraction of the projectile's kinetic energy. In all the examples, this fraction is between 1–5%, in good agreement with the typical limits of the anelasticity parameter f_{KE} usually found in the literature. Figure 2a also shows that most of the final kinetic energy goes to the translational motion, while only a small fraction—between 10–20%—remains in the rotational energy of the fragments. As we already mentioned, in all the examples the variation of total linear and angular momenta is within the tolerance error of the propagator (Fig. 2b) during the whole integration time span.

4.2. Ejection velocities

Ejection velocities of the fragments are computed as the difference between the post-impact velocity (at $t = 400$ s) and the pre-impact velocity (at $t = 0$). Analyzing these ejection velocities in the different examples, we find a systematic dependence on the number of fragments in the target: the smaller the number of fragments the smaller the average ejection velocity. This result is expected since the fragments from target N30 are larger than those from target N200 (see Table 1). Typical ejection velocities are roughly about 0.01–0.05% of the projectile velocity, but for the smallest fragments they may range between 0.004–0.2%. In all the examples, we observe that only small fragments are ejected

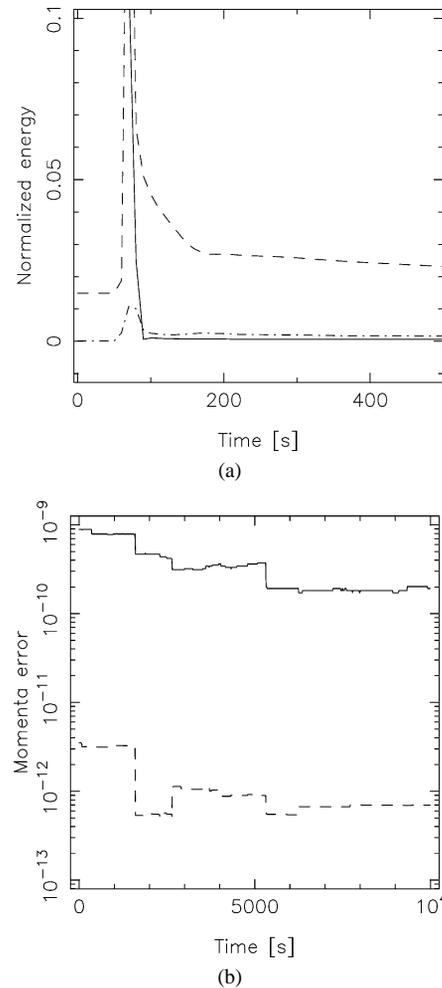


Fig. 2. (a) Energy partition during a collision between target N200 and projectile P2: kinetic energy of projectile (solid line), total—translational + rotational—kinetic energy of fragments (dashed line), rotational kinetic energy of fragments (dotted-dashed line). All energies are normalized to the initial value of the projectile's kinetic energy. The target is initially rotating with a period of 4 h, and the projectile impacts at an angle $\zeta = 45^\circ$. (b) Variation of total angular momentum (solid line) and total linear momentum (dashed line) during the integration time span.

at the impact point, while the largest ones tend to be ejected at the antipodal point. This effect is more noticeable for impacts onto targets with few fragments.

There is also a systematic dependence of the post-impact velocity field with the angle of impact. In all cases the field is aligned with the direction of the impact, but this alignment is more prominent when the impact occur along the z axis (recall that the rubble-pile is rotating around this axis). This is shown in Figs. 3a, 3b for a collision with projectile P2 impacting at an angle $\zeta = 0^\circ$. When the impact occurs over the target's equator ($\zeta = 90^\circ$), the alignment is not so prominent and there are more fragments ejected in the direction perpendicular to the impact direction, as shown in Figs. 3c, 3d.

In Fig. 4 we present the distribution of ejection velocities in dependence of the fragments' size for three different impact energies. The data may be fit by a power law rela-

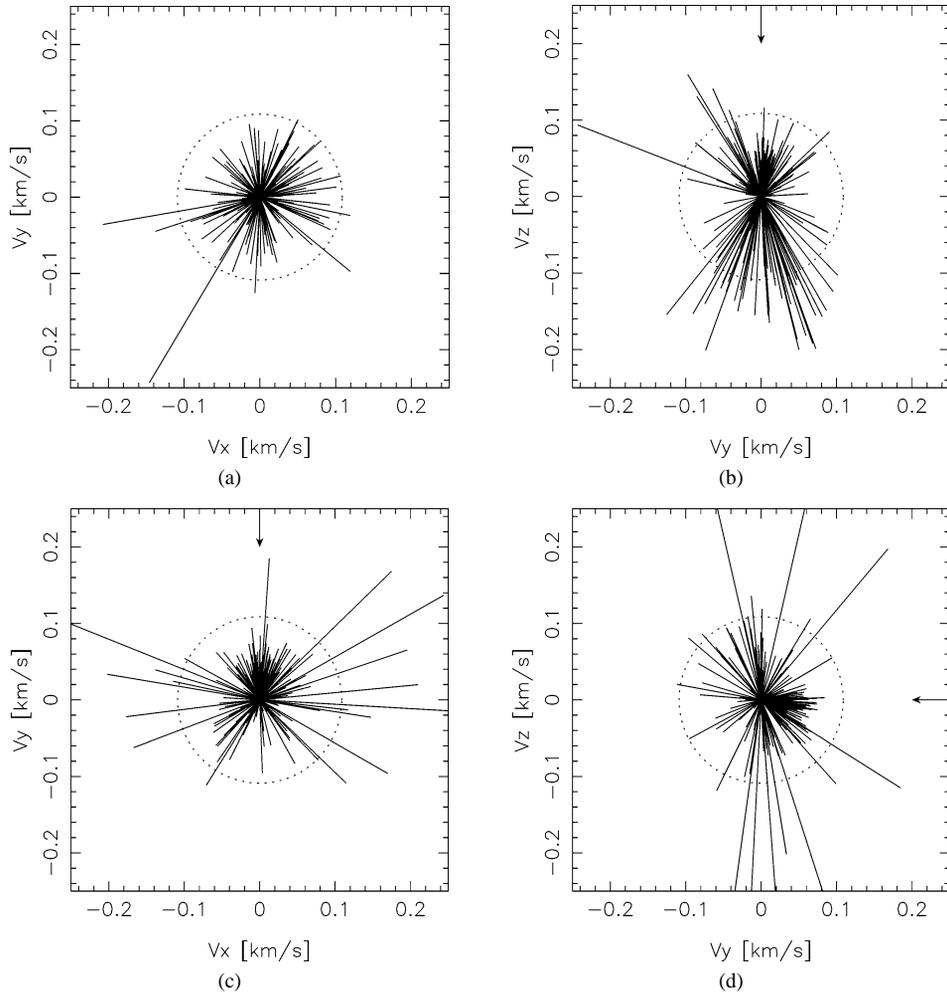


Fig. 3. Post-impact velocity field (300 s after the impact) in the v_x, v_y - and v_y, v_z -planes. Velocities are referred to the barycenter of the target. The results correspond to target N200, rotating with period of 12 h, and impacted by projectile P2. The dotted circle is the escape velocity limit. (a), (b) Impact with angle $\zeta = 0^\circ$. (c), (d) Impact with angle $\zeta = 90^\circ$. The impact direction is indicated by the arrows.

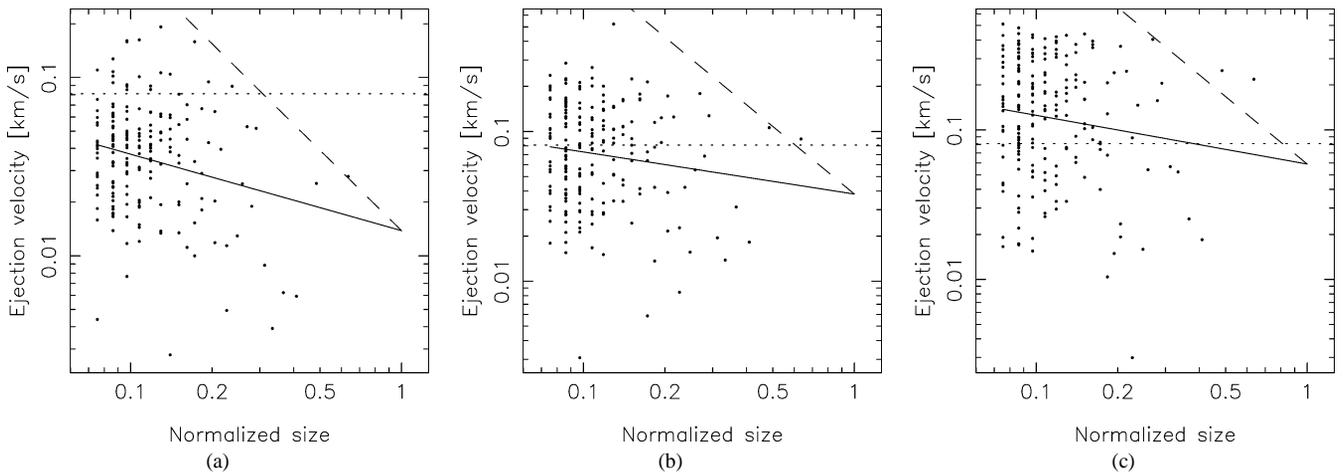


Fig. 4. Ejection velocity vs. fragments' size (normalized to the size of the parent body), 300 s after the impact. The results correspond to target N200, rotating with period 4 h, and impacted with an angle $\zeta = 45^\circ$ by projectile P1 (a), P2 (b), and P3 (c). The dotted horizontal line indicates the ejection velocity limit for escape the parent body. The solid line is the power law best fit with exponent -0.42 (a), -0.28 (b), and -0.32 (c). The dashed line is the theoretical power law with exponent $-3/2$.

tionship (solid line), although there is a large dispersion of ejection velocities especially among the smaller fragments. In all our numerical examples, the exponent of this power law is between -0.10 and -0.50 . These values are far away from the -1.5 exponent expected from the hypothesis of equipartition of kinetic energy (e.g., Cellino et al., 1999). Actually, this theoretical curve (dashed line) appears to be the upper boundary of the distributions.

From Fig. 4 it is evident that the collisions with projectile P1 do not generate sufficiently large ejection velocities to escape the parent body,⁶ and most fragments start to re-accumulate very soon after disruption. Collisions with projectile P2 can also lead to the re-accumulation of several fragments, but this happens only over time scales of several hours. Finally, a large number of fragments is dispersed during collisions with projectile P3 and do not re-accumulate.

In order to estimate the amount of mass dispersed after the impacts, we compute the post-impact kinetic energy, \mathcal{K}_i , of each fragment, and assume that the fragment is in escaping trajectory if $\mathcal{K}_i \geq |\mathcal{U}_i^{\text{bind}}|$, where

$$\mathcal{U}_i^{\text{bind}} = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (43)$$

is the gravitational binding energy of the fragment. The results for the three different impact energies used in our calculations are shown in Fig. 5. The fraction of mass that remains bounded after the impact varies almost linearly with the impact energy Q . The catastrophic threshold, for which 50% of the target mass is dispersed, is about $Q_D^* = 2.6 \times 10^9 \text{ erg g}^{-1}$. This is in good agreement with the values expected from typical scaling laws in the gravity dominated regime. For example, the catastrophic threshold estimated by Benz and Asphaug (1999) is about $2.68\text{--}4.49 \times 10^9 \text{ erg g}^{-1}$ for our typical target size. Smaller values are predicted by Love and Ahrens (1996), $2.1 \times 10^9 \text{ erg g}^{-1}$, and by Davis et al. (1995), $1.8 \times 10^9 \text{ erg g}^{-1}$.

The dispersion observed in the fraction of surviving mass is somehow related to the initial rotation of the target. For targets rotating with a period of 4 h, the amount of mass dispersed after the impact is larger than for those initially rotating with 12 h period. This may be indicating that the rotational state of the target, which is not always accounted for in the SPH simulations, may play a relevant role in constraining the aggregation of fragments after a catastrophic collision.

⁶ The escape velocity is computed according to Petit and Farinella (1993) as:

$$v_{\text{esc}}^2 = 1.64GM/R_{\text{eff}}$$

where M and R_{eff} are the total mass and effective radius of the target, and G is the gravitational constant. This gives a value of $\sim 109 \text{ m s}^{-1}$ for all targets.

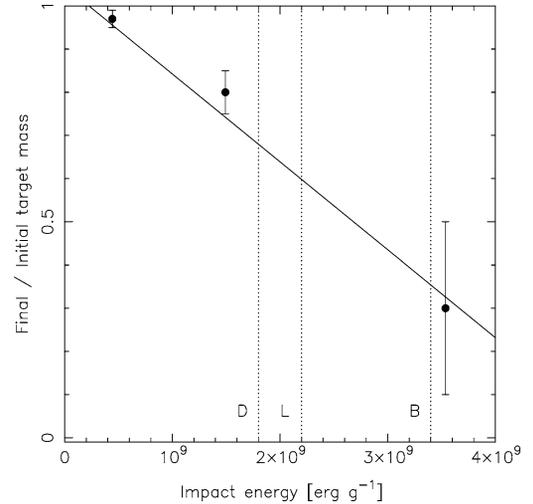


Fig. 5. Fraction of target mass that remains bounded after the impact in dependence of the specific impact energy Q . The dots are the averages over all our experiments and the error bars represent the maximum excursions. The estimates are computed 300 s after the impact. The dotted vertical lines are the catastrophic threshold estimated by: Davis et al. (1995) (D); Love and Ahrens (1996) (L); Benz and Asphaug (1999) (B). The solid line is the best fit $1.04\text{--}0.2 \times 10^{-9} Q$.

4.3. Spin distribution

Figure 6 shows the histogram of the post-impact intrinsic spins of the individual fragments. The results are analyzed 300 s after the impact of projectile P2 onto target N200. We recall that, for most fragments, the pre-impact spins (at $t = 0$) are close to zero. The most striking result are the relatively fast spin rates of most fragments, that range from periods of 2 h to a few of minutes. We may note that these spin rates are overestimated due to the value of κ used in the moment of inertia of the ellipsoids. Indeed, for a given parti-

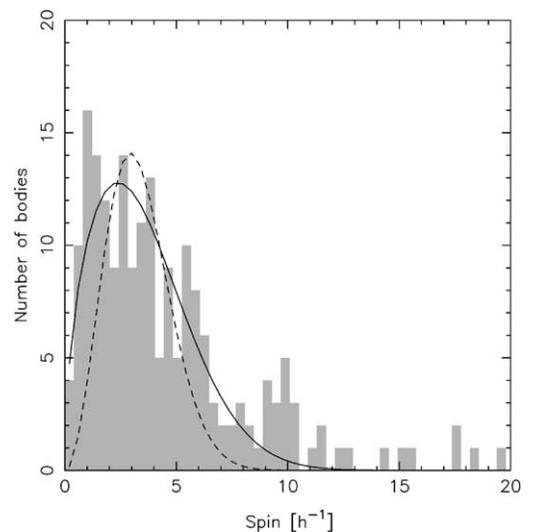


Fig. 6. Histogram of the intrinsic spins, 300 s after the impact of projectile P2 onto target N200. The impact occurs at an angle $\zeta = 0^\circ$. The target is rotating with 4 h period. The solid curve is the best fit Eq. (44) with $n = 1/2$. The dashed curve corresponds to a Maxwellian fit.

tion of the rotational energy during the impact, the resulting spins should be roughly multiplied by a factor of $\sqrt{5/(2\kappa)}$ to account for the fact that the density distribution of the ellipsoids is not uniform. Since in all our examples $\kappa \simeq 10$, the above periods should be roughly multiplied by a factor of 2. In any case, most fragments have periods below the minimum of $\sim 2\text{--}4$ h allowed for strength-less bodies (Weidenschilling, 1981), and this is compatible with our assumption of monolithic fragments. We must recall that such fast rotation rates have only been detected in meter sized asteroids, while the smallest fragments in our experiments have a few kilometers. Notwithstanding, there is theoretical evidence that fast rotation would be possible in large porous bodies (Holsapple, 2001), and our results are also in agreement with simulations by Asphaug and Scheeres (1999) that provide very short rotational periods—ranging over two orders of magnitude—for kilometer sized fragments.

Another notable result from Fig. 6 is that the post-impact spin distribution cannot be fit with a Maxwellian. Indeed, there is a clear excess of slow and fast rotators with respect to the Maxwellian distribution. We try different fits by the function

$$f(x) = ax^n e^{-x^2/b^2} \quad (44)$$

assuming different values of n . The fits are done using a Levenberg–Marquardt algorithm (Press et al., 1997) to find a and b . The minimum residuals are obtained with $n = 0.5$ and this best fit is shown by the solid curve in Fig. 6. The dashed curve represents the Maxwellian fit with $n = 2$. The residuals in this case are more than twice or three times the residuals from the best fit.

We recall that it is usually assumed that a Maxwellian distribution would be the natural end state of any spin-relaxed population. For example, the distribution of asteroid rotation rates is approached to a Maxwellian (e.g., Harris and Burns, 1979; Farinella et al., 1981; Binzel et al., 1989; Fulchignoni et al., 1995). Our best fit with exponent $n = 0.5$ is in line with the above idea. It would be indicating that the spins are highly “thermalized” after the impact, and that any relaxation of the fragments’ spins is achieved over time-scales much larger than our integration time span. We must bear in mind that the present state of the model does not allow to simulate the long term evolution of the spins because the multipole expansion of the gravitational potential is not accounted for (Scheeres et al., 2000). Moreover, if substantial re-accumulation takes place, the individual spin of the fragments is no longer relevant.

Figure 7 compares the best fits of the spin distributions for different impact energies. The fits are normalized such that

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} ab^{n+1} \Gamma((n+1)/2) = 1, \quad (45)$$

where $\Gamma(n)$ is the gamma function. As expected, the distributions are wider for larger impact energies. However, the

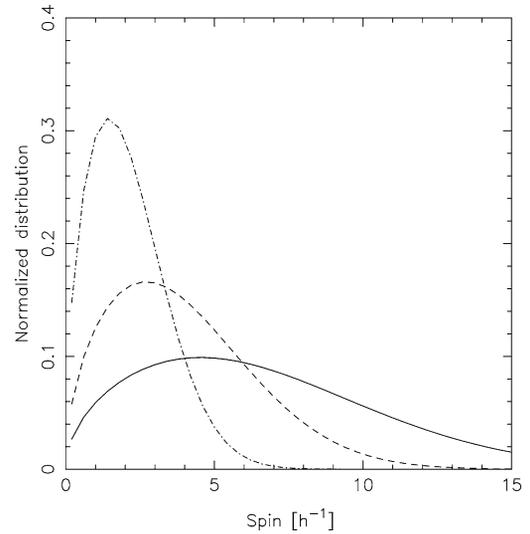


Fig. 7. Best fits of spin distributions, 300 s after the impact, for three different impact energies: with projectile P1 (dotted-dashed line), with projectile P2 (dashed line), and with projectile P3 (solid line). All examples correspond to target N200, rotating with 12 h period, and impacted at an angle $\zeta = 45^\circ$. The distributions are normalized as explained in the text.

width of the distributions may change significantly over the integration time span. This happens in the examples with projectile P1, since most fragments re-accumulate very soon after the impact and the subsequent dissipation slows their spins. On the other hand, the spin distributions from the examples with projectiles P2 and P3 do not significantly change during the integrations.

The post-impact spins as a function of the fragments’ size are shown in Fig. 8. In most cases, the fragments have rotational periods larger than the original period of the target. The data may be fit by a power law, although a large dispersion of spin values is observed among the smallest fragments. Typical values of the power law exponent are in the range -1.0 to -1.4 . These values are smaller than the theoretical exponent -2.5 obtained by assuming equipartition of rotational kinetic energy. In fact, this latter power law rather gives the upper limit of the spin distribution at each fragment size. This situation is similar to the distribution of ejection velocities, and we may conclude that energy equipartition is never satisfied during a collision.

Since the acquired spin mostly depends on the moment of inertia of each fragment, the above results could actually change if we change the shape of the ellipsoids. For example, we may expect that considering more spherical fragments the spin distributions would be even narrower than those of Figs. 6–7, although the power law exponent would not change significantly. However, additional simulations are needed in order to confirm this idea.

4.4. Tumbling distribution

In order to characterize the tumbling state of each fragment after the impact, we follow Scheeres et al. (1998, 2000) and introduce the effective moment of inertia, I_i^{eff} , defined

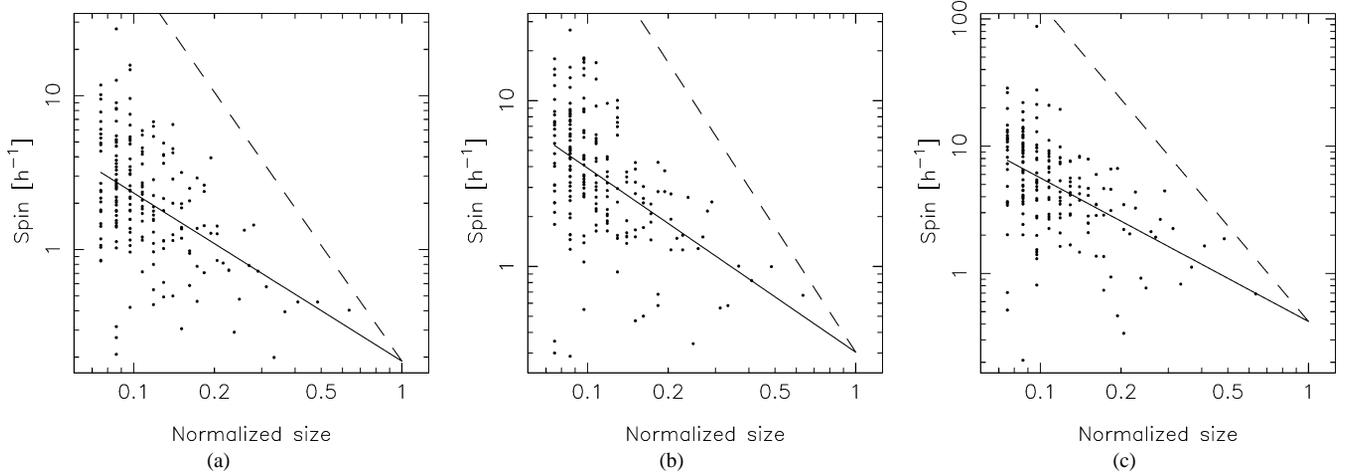


Fig. 8. Post-impact intrinsic spins vs. fragments' size (normalized to the size of the parent body), 300 s after the impact. The results correspond to target N200, rotating with period 4 h, and impacted at an angle $\zeta = 45^\circ$ by projectile P1 (a), P2 (b), and P3 (c). The solid line is the power law best fit with exponent -1.09 (a), -1.11 (b), and -1.13 (c). The dashed line is the theoretical power law with exponent $-5/2$.

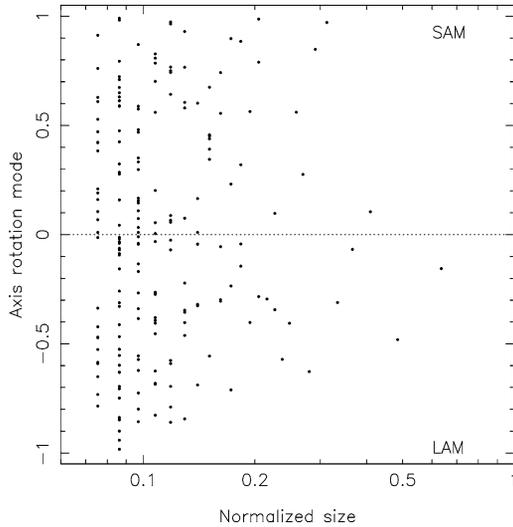


Fig. 9. Axis rotation mode vs. fragments size (normalized to the size of the parent body), 300 s after the impact. The results correspond to target N200, rotating with period 12 h, and impacted by projectile P2. The projectile impacted at an angle $\zeta = 90^\circ$. Positive and negative values in the vertical axis correspond to rotation in short-axis mode (SAM) and long-axis mode (LAM), respectively.

as

$$I_i^{\text{eff}} = \frac{|\mathbf{L}_{S,i}|^2}{2\mathcal{K}_{R,i}}, \quad (46)$$

where $\mathbf{L}_{S,i} = \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i$ is the intrinsic angular momentum of spin and $\mathcal{K}_{R,i} = \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i / 2$ is the intrinsic rotational kinetic energy, both computed from Eqs. (4) and (23). This parameter is used to define the axis rotation mode of the fragment. Since $I_i^x \leq I_i^y \leq I_i^z$, the fragment is in a short-axis rotation mode (SAM) if $I_i^y < I_i^{\text{eff}} \leq I_i^z$ or in a long-axis rotation mode (LAM) if $I_i^x \leq I_i^{\text{eff}} < I_i^y$.

Figure 9 shows the axis rotation mode of the fragments a few minutes after the impact, in dependence of their size. The values of $I_i^{\text{eff}} - I_i^y$ in the ordinates has been normalized

such that 1 corresponds to a pure SAM, -1 corresponds to a pure LAM, and 0 corresponds to a pure middle-axis rotation mode. In all our examples, we find that most fragments after the impact are in a complex tumbling regime, like in this figure, and they keep this spinning state over the integration time span. In fact, we should not expect that the tumbling state of an ellipsoid changes, unless it re-accumulates with other ellipsoids or the model accounts for the gravitational multipole. Only in a few cases we detect some fragments in a nearly pure rotation around one axis. This is in good agreement with the simulations by Asphaug and Scheeres (1999) which found a full spectrum of rotational states ranging from nearly pure SAM to nearly pure LAM.

The above results are compatible with the idea that asteroids in a complex rotational state, like 4179 Toutatis, have been involved in recent collisional events, while the principal axis rotation observed in most asteroids is a consequence of their collisional and tidal evolution over very long time scales.

5. Conclusions

The above numerical examples show that our model describes fairly well the basic macroscopic features of the collisional dynamics of rubble-piles impacted by high-velocity projectiles. The model provides reasonable estimates for the energy partition and the ejection velocities. The rather fast spin rates of the resulting fragments and their tumbling states are in agreement with recent results based on hydrocodes. We may conclude that the behavior of the different observables predicted by our model is within expected ranges according to the typical impact energies considered.

Our model is based on a pure mechanical approach, expressed in terms of well-defined Lagrangian and dissipation functions, and has the advantage of being conceptually very simple. In spite of its simplicity, it has the minimal char-

acteristics to model the evolution of the attitude and spin of individual fragments. At this level, the model can provide an insight of the physical processes underneath the catastrophic collision of rubble-piles. Therefore, it may be applied to study some problems of Solar System dynamics, like the dynamical properties of fragments from recent collisional events (e.g., Nesvorný et al., 2002). Moreover, since the model is physically well-defined, it can be used as a kind of benchmark to test whether some ingredient is missing when the model does not reproduce the expected behavior of the problem under analysis.

In a forthcoming work we plan to extend the present study to analyze the long term re-accumulation processes after breakup events and the possible formation of contact binaries and satellites. The code may be modified in order to allow the projectile to be a rubble-pile too, and this could be applied to study low-velocity impacts, like those arising during planetesimal accretion (e.g., Leinhardt et al., 2000). Finally, we intend to incorporate to the model some additional effects, like the gravitational multipole interactions and the solar or planetary perturbations. We expect that this will allow us to model the tidal disruption of rubble-piles.

Acknowledgments

We thank C.E. Aguiar for fruitful discussions at the early stages of the model and for the crucial suggestion to use the quaternion variables. The comments and criticism of the two referees have helped to improve the manuscript and were highly appreciated. This work has been supported by CNPq, CAPES, and FAPERJ.

Appendix A. Dissipation function with additional conservation law

Consider the dynamics of the system of ellipsoids described by Eqs. (28) and (37). The effective Lagrangian is given by Eqs. (27) and (30), and the dissipation function is given by Eq. (41). Suppose that the system has a symmetry, so that the effective Lagrangian is invariant under the transformation: $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i$ and $\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_i + \delta\mathbf{q}_i$. In addition, suppose that this transformation may be expressed in terms of the variation of a given parameter, χ , as:

$$\delta\mathbf{r}_i = \delta\chi \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\chi}, \quad \delta\mathbf{q}_i = \delta\chi \frac{\partial\mathbf{q}_i}{\partial\chi}. \quad (\text{A.1})$$

The symmetry of the system is represented by the condition

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathcal{L}} &= \sum_{i=1}^N \left(\delta\mathbf{r}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{r}_i} + \delta\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i} + \delta\mathbf{q}_i \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\mathbf{q}_i} + \delta\dot{\mathbf{q}}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \delta\mathbf{r}_i \left(\dot{\mathbf{u}}_i - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i} \right) + \sum_{i=1}^N \delta\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^N \delta\mathbf{q}_i \left(\dot{\mathbf{p}}_i - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_i} \right) + \sum_{i=1}^N \delta\dot{\mathbf{q}}_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_i} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\delta\mathbf{r}_i \mathbf{u}_i + \delta\mathbf{q}_i \mathbf{p}_i) - \sum_{i=1}^N \left(\delta\mathbf{r}_i \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i} + \delta\mathbf{q}_i \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_i} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

and this condition defines a conservation law of the system. If $\mathcal{F} \equiv 0$, the quantity

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\chi} \mathbf{u}_i + \frac{\partial\mathbf{q}_i}{\partial\chi} \mathbf{p}_i \right) \quad (\text{A.3})$$

is a constant of motion. When the change in the coordinates is a pure translation, \mathbf{L} is the total linear momentum of the system

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i. \quad (\text{A.4})$$

In the case of a pure rotation we get the total angular momentum

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \mathbf{p}_i) \quad (\text{A.5})$$

with

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta_i & -\gamma_i & \beta_i & -\alpha_i \\ \gamma_i & \delta_i & -\alpha_i & -\beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i & \delta_i & -\gamma_i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Note, however, that even if $\mathcal{F} \neq 0$ it is possible to preserve \mathbf{L} provided that

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial\chi} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i} + \frac{\partial\mathbf{q}_i}{\partial\chi} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_i} \right) = 0. \quad (\text{A.7})$$

We will now show that the point dissipation function Eq. (40) fulfills the above condition. For any pair i, j of ellipsoids we have

$$\mathcal{F}_{ij} = - \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} \rho_i(\mathbf{r}) \rho_j(\mathbf{r}) \mathbf{v}_{ij}^2, \quad (\text{A.8})$$

where $\mathbf{v}_{ij} = \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j + \dot{\mathbf{R}}_i^T \mathbf{s}^{(i)} - \dot{\mathbf{R}}_j^T \mathbf{s}^{(j)}$, and Eq. (A.7) becomes

$$\begin{aligned} &\sum_{k=i,j} \left(\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial\chi} \frac{\partial\mathcal{F}_{ij}}{\partial\dot{\mathbf{r}}_k} + \frac{\partial\mathbf{q}_k}{\partial\chi} \frac{\partial\mathcal{F}_{ij}}{\partial\dot{\mathbf{q}}_k} \right) \\ &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{r} \rho_i(\mathbf{r}) \rho_j(\mathbf{r}) \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=i,j} \left(\frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial\chi} \frac{\partial\mathbf{v}_{ij}^T}{\partial\dot{\mathbf{r}}_k} + \frac{\partial\mathbf{q}_k}{\partial\chi} \frac{\partial\mathbf{v}_{ij}^T}{\partial\dot{\mathbf{q}}_k} \right) \right\} \mathbf{v}_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

But it is straightforward to prove that

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_{ij}^T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} &= \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{r}_i}, & \frac{\partial \mathbf{v}_{ij}^T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} &= -\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{r}_j}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{ij}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} &= \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{q}_i}, & \frac{\partial \mathbf{v}_{ij}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} &= -\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{q}_j}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

where $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i^T \mathbf{s}^{(i)} = \mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j^T \mathbf{s}^{(j)}$. Therefore

$$\sum_{k=i,j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{r}_k} + \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{q}_k} \right) = \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \boldsymbol{\chi}} - \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \boldsymbol{\chi}} = 0 \quad (\text{A.11})$$

and this condition is satisfied for all the pairs i, j of ellipsoids in the system. This proves that the point dissipation function preserves the total linear and angular momentum of the system.

References

- Asphaug, E., Scheeres, D.J., 1999. Deconstructing Castalia. Evaluating a postimpact state. *Icarus* 139, 383–386.
- Benz, W., Asphaug, E., 1994. Impact simulations with fracture I. Methods and tests. *Icarus* 107, 98–116.
- Benz, W., Asphaug, E., 1999. Catastrophic disruptions revisited. *Icarus* 142, 5–20.
- Benz, W., Asphaug, E., Ryan, E.V., 1994. Numerical simulations of catastrophic disruption: recent results. *Planet. Space Sci.* 42, 1053–1066.
- Binzel, R.P., Farinella, P., Zappalà, V., Cellino, A., 1989. Asteroid rotation rates: distribution and statistics. In: Binzel, R.P., et al. (Eds.), *Asteroids II*. Univ. of Arizona Press, Tucson, pp. 416–441.
- Botke, W.F., Richardson, D.C., Michel, P., Love, S.G., 1999. 1620 Geographos and 433 Eros: shaped by planetary tides? *Astron. J.* 117, 1921–1928.
- Cellino, A., Michel, P., Tanga, P., Zappalà, V., 1999. The velocity-size relationship for members of asteroid families and implications for the physics of catastrophic collisions. *Icarus* 141, 79–95.
- Chapman, C.R., 7 colleagues, 1995. Discovery and physical properties of Dactyl, a satellite of Asteroid 243 Ida. *Nature* 374, 783.
- Davis, D.R., Ryan, E.V., Farinella, P., 1995. On how to scale disruptive collisions. In: *Proc. Lunar Planet. Sci. Conf. 26th*, pp. 319–320. Abstract.
- Dohnanyi, J., 1969. Collisional model of asteroids and their debris. *J. Geophys. Res.* 74, 2531–2554.
- Durda, D.D., Greenberg, R., Jedicke, R., 1998. Collisional models and scaling laws: a new interpretation of the shape of the Main Belt asteroid size distribution. *Icarus* 135, 431–440.
- Farinella, P., Paolicchi, P., Zappalà, V., 1981. Analysis of the spin rate distribution of asteroids. *Astron. Astrophys.* 104, 159–165.
- Farinella, P., Davis, D.R., 1992. Collision rates and impact velocities in the Main Asteroid Belt. *Icarus* 97, 111–123.
- Fujiwara, A., Tsukamoto, A., 1980. Experimental study on the velocity of fragments in collision breakup. *Icarus* 44, 142–153.
- Fujiwara, A., Tsukamoto, A., 1981. Rotation of fragments in catastrophic impact. *Icarus* 48, 329–334.
- Fulchignoni, M., Barucci, M.A., Di Martino, M., Dotto, E., 1995. On the evolution of asteroids spin. *Astron. Astrophys.* 299, 929–932.
- Giblin, I., Martelli, G., Smith, P.N., Cellino, A., Di Martino, M., Zappalà, V., Farinella, P., Paolicchi, P., 1994. Field fragmentation of macroscopic targets simulating asteroidal catastrophic collisions. *Icarus* 110, 203–224.
- Giblin, I., Martelli, G., Farinella, P., Paolicchi, P., Di Martino, M., Smith, P.N., 1998. The properties of fragments from catastrophic disruption events. *Icarus* 134, 77–112.
- Gingold, R.A., Monaghan, J.J., 1977. Smothered particle hydrodynamics: theory and applications to non spherical stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 181, 375–389.
- Harris, A.W., Burns, J.A., 1979. Asteroid rotation rates. I. Tabulation and analysis of rates, pole positions and shapes. *Icarus* 40, 115–144.
- Holsapple, K.A., 1994. Catastrophic disruptions and cratering of Solar System bodies: a review and new results. *Planet. Space Sci.* 42, 1067–1078.
- Holsapple, K.A., 2001. Equilibrium configurations of solid cohesionless bodies. *Icarus* 154, 432–448.
- Housen, K.R., Holsapple, K.A., 1990. On the fragmentation of asteroids and planetary satellites. *Icarus* 84, 226–253.
- Housen, K.R., Holsapple, K.A., 1999. Scale effects in strength-dominated collisions of rocky asteroids. *Icarus* 142, 21–33.
- Kwiatkowski, T., 1995. Sideral period, pole and shape of Asteroid 1620 Geographos. *Astron. Astrophys.* 294, 274–277.
- Leinhardt, Z.M., Richardson, D.C., Quinn, T., 2000. Direct N -body simulations of rubble pile collisions. *Icarus* 146, 133–151.
- Leinhardt, Z.M., Richardson, D.C., 2002. N -body simulations of planetesimal evolution: effect of varying impactor mass ratio. *Icarus* 159, 306–313.
- Love, S.G., Ahrens, T.J., 1996. Catastrophic impacts on gravity dominated asteroids. *Icarus* 124, 141.
- Love, S.G., Hoerz, F., Brownlee, D.E., 1993. Target porosity effects in impact cratering and collisional disruption. *Icarus* 105, 216–224.
- Lucy, L.B., 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. J.* 82, 1013–1024.
- Melosh, H.J., Ryan, E.V., 1997. Asteroids: shattered but not dispersed. *Icarus* 129, 562–564.
- Merline, W.J., 5 colleagues, 1999. Discovery of a moon orbiting the Asteroid 45 Eugenia. *Nature* 401, 565–568.
- Michel, P., Benz, W., Tanga, P., Richardson, D.C., 2001. Collisions and gravitational re-accumulation: forming asteroid families and satellites. *Science* 294, 1696–1700.
- Michel, P., Tanga, P., Benz, W., Richardson, D.C., 2002. Formation of asteroid families by catastrophic disruption: simulations with fragmentation and gravitational re-accumulation. *Icarus* 160, 10–23.
- Miller, J.K., 6 colleagues, 2002. Determination of shape, gravity, and rotational state of Asteroid 433 Eros. *Icarus* 155, 3–17.
- Nakamura, A., Fujiwara, A., 1991. Velocity distribution of fragment formed in a simulated collision disruption. *Icarus* 92, 132–146.
- Nesvorný, D., Botke, W.F., Dones, L., Levison, H.F., 2002. The recent breakup of an asteroid in the Main Belt region. *Nature* 417, 720–721.
- Paolicchi, P., Burns, J.A., Weidenschilling, S.J., 2003. Side effects of collisions: spin rate changes, tumbling rotation states and binary asteroids. In: Botke, W.F., et al. (Eds.), *Asteroids III*. Univ. of Arizona Press, Tucson, pp. 517–526.
- Paolicchi, P., Cellino, A., Farinella, P., Zappalà, V., 1989. A semi-empirical model of catastrophic breakup processes. *Icarus* 77, 187–212.
- Petit, J.-M., Farinella, P., 1993. Modelling the outcomes of high-velocity impacts between Solar System bodies. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 57, 1–28.
- Pravec, P., Harris, A.W., 2000. Fast and slow rotation of asteroids. *Icarus* 148, 12–20.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1997. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Richardson, D.C., Quinn, T., Stadel, J., Lake, G., 2000. Direct large-scale N -body of planetesimal dynamics. *Icarus* 143, 45–59.
- Richardson, D.C., Leinhardt, Z.M., Melosh, H.J., Botke, W.F., Asphaug, E., 2003. Gravitational aggregates: evidence and evolution. In: Botke, W.F., et al. (Eds.), *Asteroids III*. Univ. of Arizona Press, Tucson, pp. 501–515.
- Ryan, E.V., 1992. Catastrophic collisions: laboratory impact experiments, hydrocode simulations, and the scaling problem. PhD thesis. Univ. of Arizona Press, Tucson.
- Ryan, E.V., Melosh, H.J., 1998. Impact fragmentation: from the laboratory to asteroids. *Icarus* 133, 1–24.

- Scheeres, D.J., Ostro, S.J., Hudson, R.S., DeJong, D.M., Suzuki, S., 1998. Dynamics of orbits close to Asteroid 4179 Toutatis. *Icarus* 132, 53–79.
- Scheeres, D.J., Ostro, S.J., Werner, R.A., Asphaug, E., Hudson, R.S., 2000. Effects of gravitational interactions on asteroid spin states. *Icarus* 147, 106–118.
- Thomas, P.C., 14 colleagues, 2002. Eros: shape, topography, and slope processes. *Icarus* 155, 18–37.
- Veverka, J., 12 colleagues, 1997. NEAR's flyby of 253 Mathilde: images of a C asteroid. *Science* 278, 2109–2114.
- Viateau, B., 2000. Mass and density of Asteroids 16 Psyche and 121 Hermione. *Astron. Astrophys.* 354, 725–731.
- Yeomans, D.K., 8 colleagues, 1997. Estimating the mass of Asteroid 253 Mathilde from tracking data during the NEAR flyby. *Science* 278, 2109–2114.
- Yeomans, D.K., 10 colleagues, 1999. Estimating the mass of Asteroid 433 Eros during the NEAR spacecraft flyby. *Science* 285, 560–561.
- Weidenschilling, S.J., 1981. How fast can an asteroid spin? *Icarus* 46, 124–126.
- Wetherill, G.W., 1967. Collisions in the asteroid belt. *J. Geophys. Res.* 72, 2429.
- Whittaker, E.T., 1959. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.